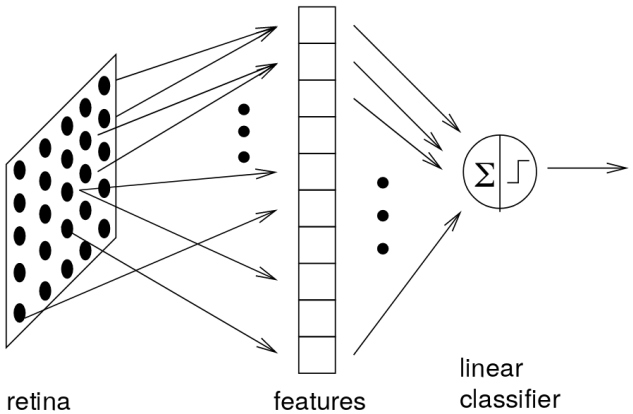
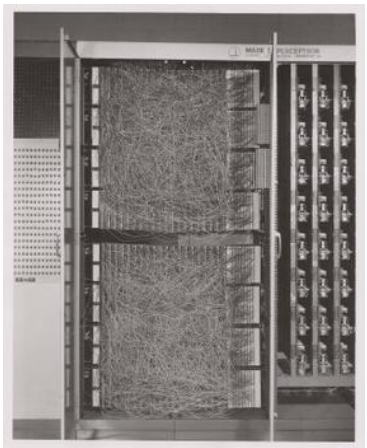
Perceptron

Reguły uczenia

Perceptron Rosenblatta (1958)

Klasyfikator neuronowy Mark I do rozpoznawania znaków alfanumerycznych, wzorowany na biologicznej percepcji (układ wzrokowy)





Trzy warstwy:

- **S-units:** wejście, siatkówka oka, 400 fotokomórki (20x20)
- **A-units:** asocjacyjne, zbierające dane z większych obszarów (obliczanie cech), 512 jednostek
- **R-units:** liniowy klasyfikator uczący, 8 wyjść

Rys: wikipedia.org
Martin Riedmiller, Machine Learning (lectures)

- $S_i = \{-1, +1\}$ sygnał docierający do elementów sensorycznych
- połączenia $c_{ij} = \{-1, 0, +1\}$ elementów S_j i A_i, przypadkowo rozrzucone w pewnym obszarze, nie ulegają zmianom, realizują wstępne przetwarzanie (ekstrakcja cech)

$$A_i = \begin{cases} +1, & \text{dla} \quad \sum_j c_{ij} S_j \geq \Theta_i \\ -1, & \text{dla} \quad \sum_j c_{ij} S_j < \Theta_i \end{cases}$$

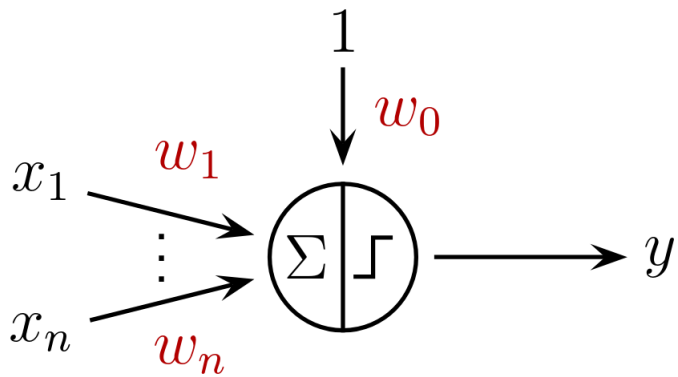
- sygnał wyjściowy

$$R_i = \begin{cases} +1 & \sum_j w_{ij} A_j > N\kappa \\ -1 & \sum_j w_{ij} A_j < -N\kappa \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

- wagi w_{ij} realizowane przez potencjometry
- proces uczenia - mechaniczna regulacja wartości potencjometrów za pomocą silników elektrycznych

Perceptron współczesny

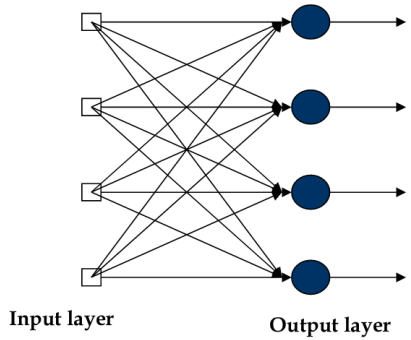
- Zwykle przez „perceptron” rozumie się teraz pojedynczy neuron z wieloma wejściami (bez jednostek S, bo tu nie ma adaptacji).
- **Perceptron prosty**



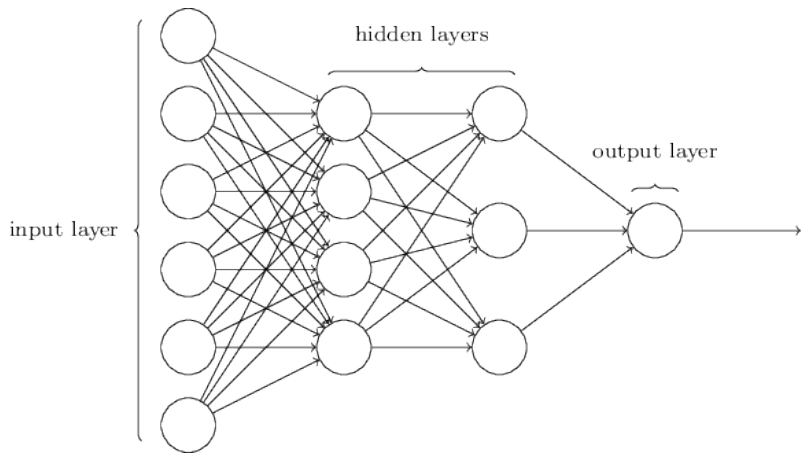
$$y = f\left(\sum_i w_i x_i + w_0\right)$$

Rys: Martin Riedmiller, Machine Learning (lectures)

Single layer perceptron



Multilayer perceptron (MLP)

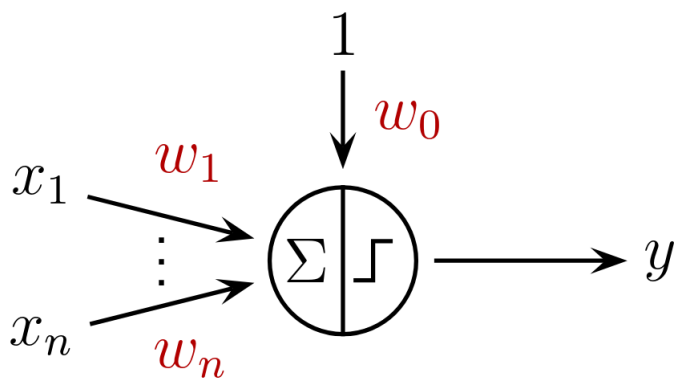


Rys: M. Bennamoun, Neural Computation (lecture)
computersciencewiki.org

Neuron binarny

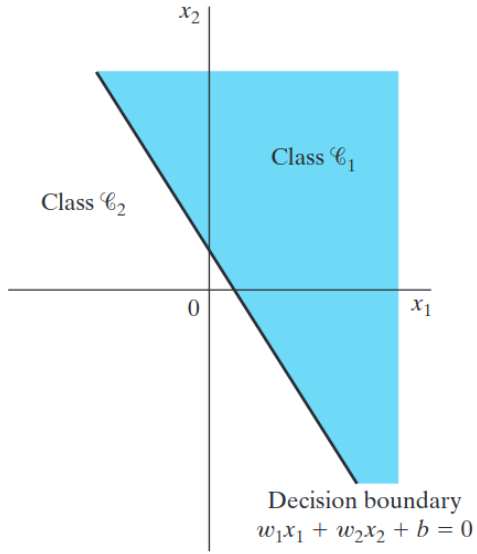
Perceptron prosty (binarny)

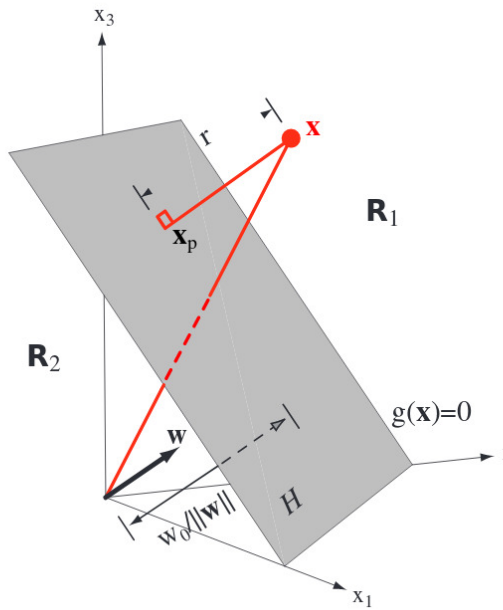
$$y = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad \sum_i w_i x_i + w_0 \geq 0 \\ 0, & \text{gdy} \quad \sum_i w_i x_i + w_0 < 0 \end{cases}$$



Interpretacja geometryczna

- $x_1, \ldots, x_n$ to współrzędne punktu w n-wymiarowej przestrzeni ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$)
- równanie $\sum x_i w_i + w_0 = 0$ definiuje płaszczyznę (hiperpłaszczyznę) rozdzielającą przestrzeń wejściową na dwie części R_1 i R_2
- perceptron prosty dzieli zbiór wektorów $\mathbf{x}_i$ na dwa podzbiory: te leżące poniżej płaszczyzny decyzyjnej ($y(\mathbf{x}_i) = 0$) oraz leżące powyżej płaszczyzny ($y(\mathbf{x}_i) = 1$)





Rys: Duda and Hart, Pattern Classification

Zadanie klasyfikacji binarnej

- **Klasyfikacja binarna** - przypisanie obiektów do jednej z 2 klas
- **Dane treningowe**: zbiór n przypadków $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, każdy przypisany do jednego z dwóch zbiorów $\mathbb{P}$ lub $\mathbb{N}$
- **Uczenie**: procedura doboru wag $\mathbf{w}$ i wartości progowej w_0 tak aby perceptron zwracał wartość 1 dla wszystkich $\mathbf{x}_i$ ze zbioru $\mathbb{P}$, zaś wartość 0 dla wszystkich $\mathbf{x}_i \in \mathbb{N}$
- założenie: dane są spójne, tzn. $\mathbb{P} \cap \mathbb{N} = \emptyset$

Uczenie perceptronu - idea

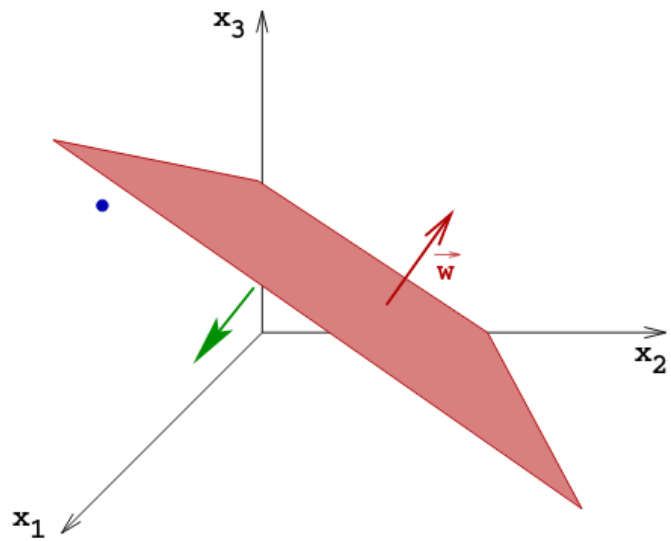
Niech **x** należy do zbioru $\mathbb{P}$. Jeżeli perceptron popełnia błąd to

$$\sum w_i x_i + w_0 < 0$$

Jak zmienić **w** i w_0 aby zniwelować błąd?

- zwiększyć w_0

☞ Training demo



przesunięcie płaszczyzny ze zwiększeniem w_0

Rys: Riedmiller, Machine Learning (lectures)

Uczenie perceptronu - idea

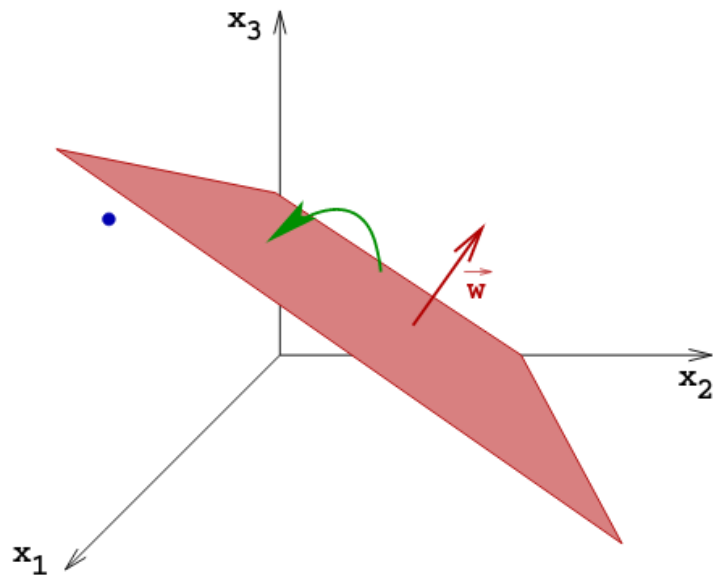
Niech **x** należy do zbioru $\mathbb{P}$. Jeżeli perceptron popełnia błąd to

$$\sum w_i x_i + w_0 < 0$$

Jak zmienić **w** i w_0 aby zniwelować błąd?

- zwiększyć w_0
- jeśli $x_i > 0$ to zwiększyć w_i
- jeżeli $x_i < 0$ to zmniejszyć w_i

☞ Training demo



obrót płaszczyzny ze zmianą **w**

Rys: Riedmiller, Machine Learning (lectures)

Algorytm uczenia perceptronu

Algorithm Algorytm uczenia perceptronu

Input: zbiór wektorów należących do jednego z dwóch zbiorów $\mathbb{P}$ i $\mathbb{N}$

Output: perceptron klasyfikujący wszystkie przypadki (jeżeli istnieje)

1: zainicjuj wagi **w** oraz wartość progową w_0 (np. małe losowe wartości w okolicy 0)
2: **while** istnieje błędnie klasyfikowany **x** **do**
3: **if** $\mathbf{x} \in \mathbb{P}$ **then**
4: $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} + \mathbf{x}$
5: $w_0 \leftarrow w_0 + 1$
6: **else**
7: $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} - \mathbf{x}$
8: $w_0 \leftarrow w_0 - 1$
9: **return** **w**, w_0

Algorytm uczenia perceptronu

- Tw. o zbieżności perceptronu: jeżeli zbiór wektorów $\mathbf{x}_i$ jest liniowo separowalny to algorytm uczenia perceptronu odnajdzie rozwiązanie w skończonej liczbie kroków
- Rozwiązanie nie jest unikatowe
- Możliwe cykle, gdy wektor wag się powtórzy w sekwencji uczenia to problem jest nierozwiązywalny
- Liczba błędów nie maleje monotoniczne - kolejna modyfikacja może popsuć klasyfikację poprzednio nauczonych przypadków
- Jak znaleźć najlepsze możliwe rozwiązanie nawet gdy problem nie jest liniowo separowalny?
- **Algorytm kieszeniowy** - uczenie perceptronu z zapamiętaniem wag dla których popełniono najmniej błędów

Algorithm Algorytm kieszonkowy

Input: zbiór wektorów należących do jednego z dwóch zbiorów $\mathbb{P}$ i $\mathbb{N}$

Output: perceptron klasyfikujący przypadki do dwóch klas

zainicjuj losowo wagi $\mathbf{w}$ i w_0
$t \leftarrow 0, \quad t' \leftarrow t, \quad \mathbf{w}' \leftarrow \mathbf{w}, \quad w_0' \leftarrow w_0$
for losowo wybranego $\mathbf{x} \in \mathbb{P} \cup \mathbb{N}$ **do**
    if $\mathbf{x}$ poprawnie klasyfikowany **then**
        $t \leftarrow t + 1$
    else
        if $t > t'$ **then**
            $t' \leftarrow t, \quad \mathbf{w}' \leftarrow \mathbf{w}, \quad w_0' \leftarrow w_0$
        $t \leftarrow 0$
        wykonaj aktualizację wag perceptronu
return $\mathbf{w}', w_0'$

Algorytm kieszonkowy

- Algorytm kieszonkowy ma za zadanie znaleźć najlepsze możliwe rozwiązanie nawet w przypadku problemów, które nie są liniowo separowalne
- Zapamiętuje tylko wagi ostatniego poprawnego przypadku, więc istnieje możliwość zignorowania wcześniejszego, lepszego rozwiązanie. Przeciwdziała temu alg. z zapadką, jednak wymaka on więcej nakładów obliczeniowych.
- **Algorytm kieszeniowy z zapadką** - modyfikacja algorytmu kieszeniowego, gdzie zapamiętywany jest zwycięzca tylko wtedy, gdy klasyfikuje poprawnie więcej przypadków treningowych

Algorithm Algorytm kieszonkowy z zapadką

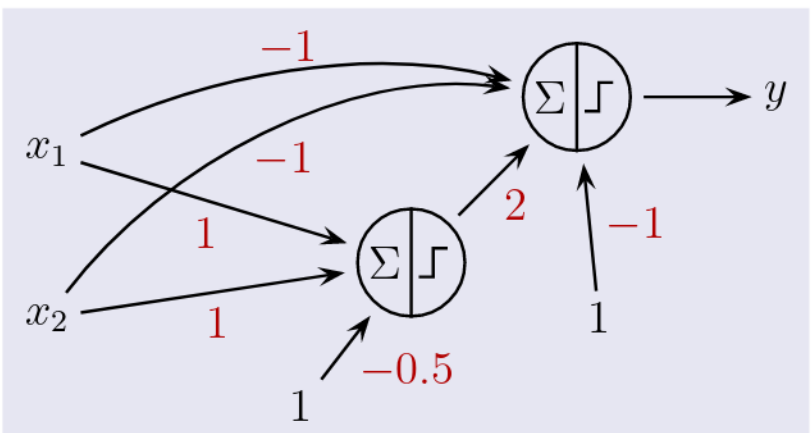
Input: zbiór wektorów należących do jednego z dwóch zbiorów $\mathbb{P}$ i $\mathbb{N}$

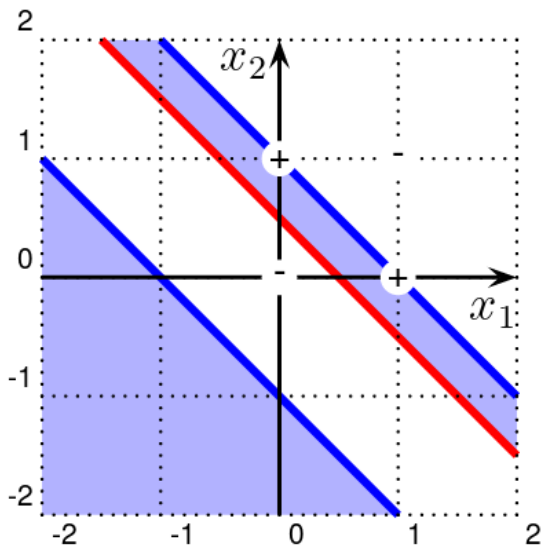
Output: perceptron klasyfikujący przypadki do dwóch klas

1: zainicjuj losowo wagi $\mathbf{w}$ i w_0
2: $t \leftarrow 0, \quad t' \leftarrow t, \quad \mathbf{w}' \leftarrow \mathbf{w}, \quad w_0' \leftarrow w_0$
3: **for** losowo wybranego $\mathbf{x} \in \mathbb{P} \cup \mathbb{N}$ **do**
4: **if** $\mathbf{x}$ poprawnie klasyfikowany **then**
5: $t \leftarrow t + 1$
6: **else**
7: **if** $t > t'$ **then**
8: **if** $\mathbf{w}$ i w_0 klasyfikują poprawnie więcej przypadków niż $\mathbf{w}'$ i w_0' **then**
9: $t' \leftarrow t, \quad \mathbf{w}' \leftarrow \mathbf{w}, \quad w_0' \leftarrow w_0$
10: $t \leftarrow 0$
11: wykonaj aktualizację wag perceptronu
12: **return** $\mathbf{w}', w_0'$

Czego może się nauczyć perceptron?

- Perceptron binarny potrafi rozwiązać wyłącznie problemy liniowo separowalne
- Przykład XOR - nie jest liniowo separowalny
- Sieci połączonych neuronów mają większe możliwości
- Problem XOR można rozwiązać za pomocą 2 perceptronów prostych



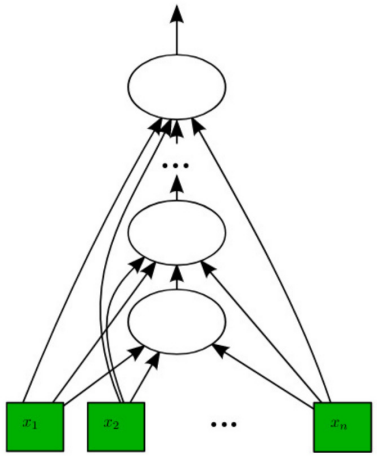


Rys: Riedmiller, Machine Learning (lectures)

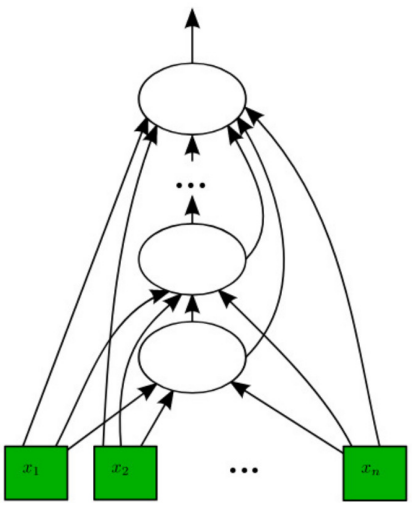
Algorytm wieżowy i piramidalny

Przykład algorytmów rozrastających się

1. Wytrenuj pojedynczy perceptron (np. algorytmem kieszonkowym) na danych treningowych
2. Jeżeli nie uzyskano zadowalającego rezultatu to dodaj perceptron, na którego wejście podany jest sygnał
   - z poprzedniego perceptronu (algorytm **wieżowy**)
   - ze wszystkich poprzednich perceptronów (algorytm **piramidalny**)
3. Wróć do punktu 1.



(a) Sieć wieżowa.

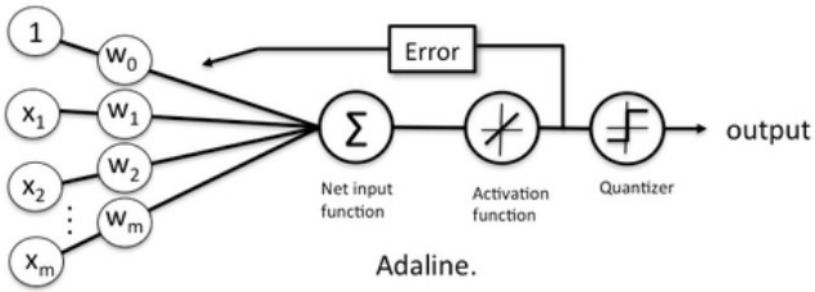


(b) Sieć piramidalna.

Maja Czoków, Jarosław Piersa, Tomasz Schreiber, Wstęp do Sieci Neuronowych

Adaline - Adaptive Linear Element

Adeline (Widrow, 1959) - jednowarstwowa sieć składająca się z perceptronów prostych. Realizacja sprzętowa z użyciem memistorów.



Adaline.

Reguła uczenia Widrowa-Hoffa

$$\Delta w_k = \lambda \left(y - \sum_i w_i x_i \right) x_k$$

gdzie y jest oczekiwanym sygnałem wyjściowym

Rys: https://sebastianraschka.com/faq/docs/diff-perceptron-adaline-neuralnet.html

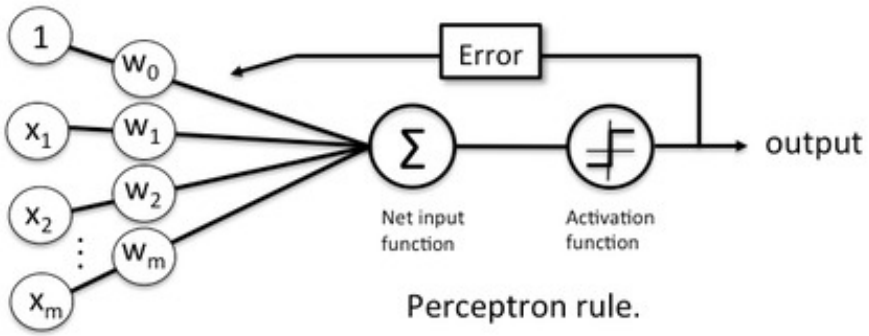
Reguła uczenia

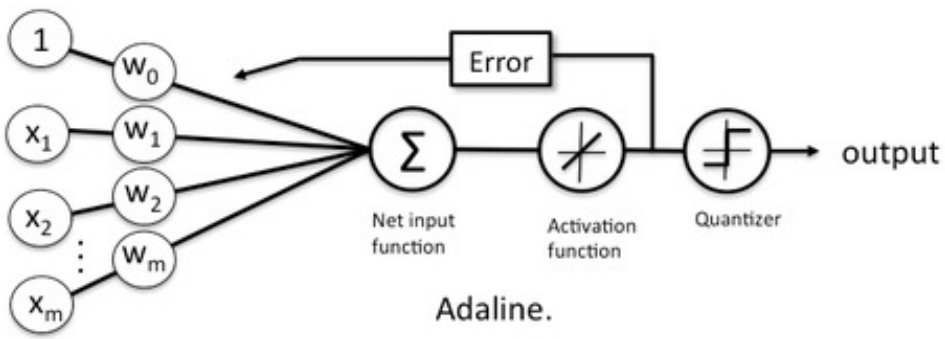
- Reguła uczenia Widrowa-Hoffa dąży do minimalizacji błędu kwadratowego aktywacji neuronu $\mathbf{w}^T\mathbf{x}$ względem pożądanego sygnału wyjściowego y

$$E_{MSE}(\mathbf{x}, y) = \frac{1}{2}\left(y - \sum_i w_i x_i\right)^2$$

- funkcja kosztu E jest ciągła, więc możliwy jest trening metodą spadku gradientu
- dla neuronów liniowych reguła jest równoważna regule delta a Adeline rozwiązuje problem aproksymacji, gdzie $y_i \in \mathbb{R}$
- dla neuronów z wyjściem progowym Adeline staje się klasyfikatorem, gdzie $y_i = \{-1, +1\}$
- Madeline - wielowarstwowa wersja Adeline

Adeline vs. Perceptron rule





Rys: https://sebastianraschka.com/faq/docs/diff-perceptron-adaline-neuralnet.html

Reguła delta

- **Reguła delta** - uogólniona reguła uczenia perceptronu dla ciągłych (różniczkowalnych) funkcji aktywacji $f(x)$

$$\Delta w_i = \lambda \left(y - f(\mathbf{x})\right) f'(\mathbf{x}) x_i$$

$\lambda > 0$ współczynnik uczenia
y to pożądany sygnał dla wejścia $\mathbf{x}$
$y \in \mathbf{R}$ dla problemu aproksymacji,
$y = \{-1, +1\}$ lub $y = \{0, 1\}$ dla klasyfikacji binarnej

- minimalizacja błędu kwadratowego E w kierunku największego spadku gradientu

$$\Delta w = -\lambda \nabla_w E$$

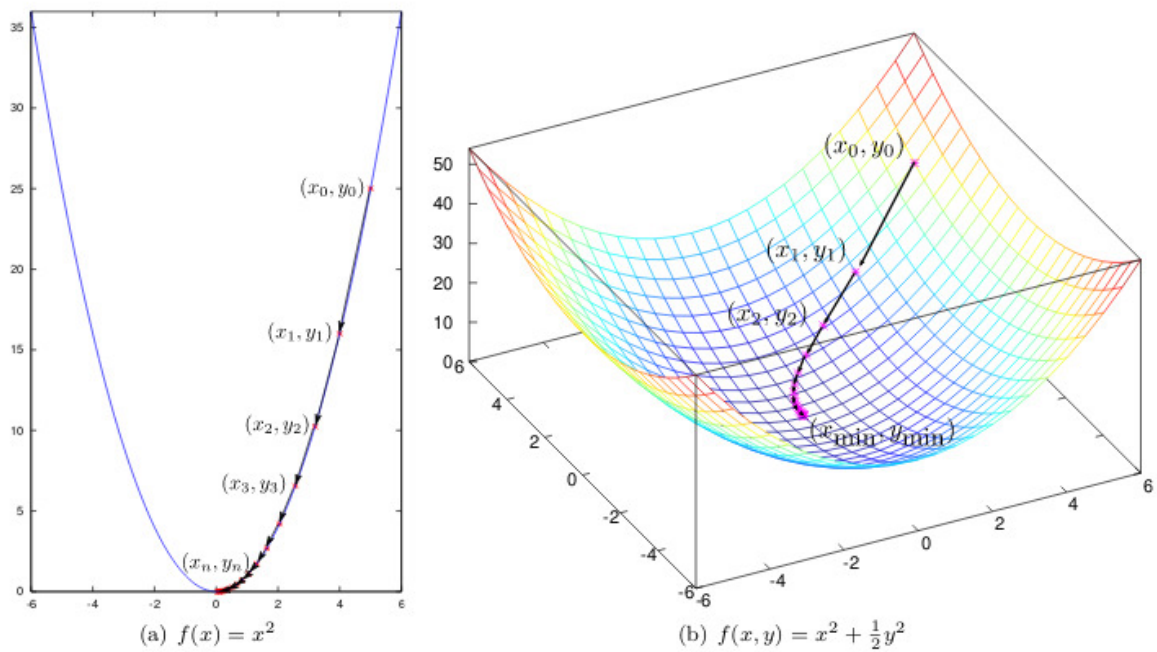
Dla błędu MSE otrzymujemy

$$\Delta w_i = -\lambda \frac{\partial}{\partial w_i} E_{MSE} = -\lambda \frac{\partial}{\partial w_i} \frac{1}{2} \left(y - f(\mathbf{x})\right)^2 = \lambda \left(y - f(\mathbf{x})\right) f'(\mathbf{x}) x_i$$

Algorytm spadku gradientu

1. ustaw punkt startu $\mathbf{w}_0$ oraz stałą uczenia $\lambda > 0$
2. dopóki nie jest spełnione kryterium stopu wykonuj

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i - \lambda \nabla E(\mathbf{w})$$



(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$

Rys: Maja Czoków, Jarosław Piersa,Tomasz Schreiber, Wstęp do Sieci Neuronowych

Aspekty uczenia spadkiem gradientu

- Jeżeli istnieją minima lokalne to istnieje ryzyko utknięcia algorytmu w tym minimum
- Powtórzenie kilkukrotne uczenia z różnymi punktami startowymi może pozwolić uniknąć minimów lokalnych
- Trajektoria zbieżności zależy od punktu startowego
- Kryterium stopu algorytmu:
  - ilość kroków uczenia lub inne ograniczenie czasowe
  - osiągnięcie zadowalającego poziomu dokładności $E < \epsilon$
  - niewielkie zmiany $||\Delta w|| < \epsilon$
- Dobór stałej uczenia λ. Gdy za duża to rozwiązanie może być pominięte (przeskoczone) a nawet proces może byc rozbieżny, gdy za mała to uczenie będzie powolne.
  Nie musi być wartością stałą, np. może być zmniejszana w czasie treningu lub dobierana zależnie od wypukłości funkcji

Funkcje aktywacji

- **identyczność**

$$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$$

- funkcja **liniowa** - nieograniczona $f(x) \in \mathbb{R}$

$$f(x) = ax + b \qquad f'(x) = a$$

- **progowa** unipolarna - nieciągła, nieróżniczkowalna

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad x \geq a \\ 0, & \text{gdy} \quad x < a \end{cases}$$

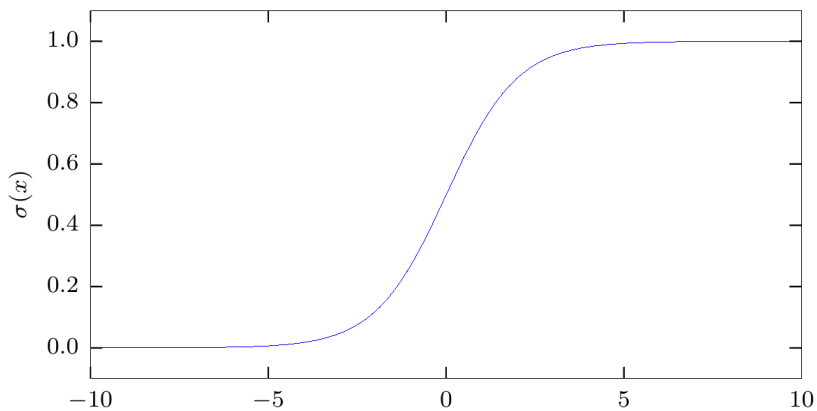
- progowa bipolarna

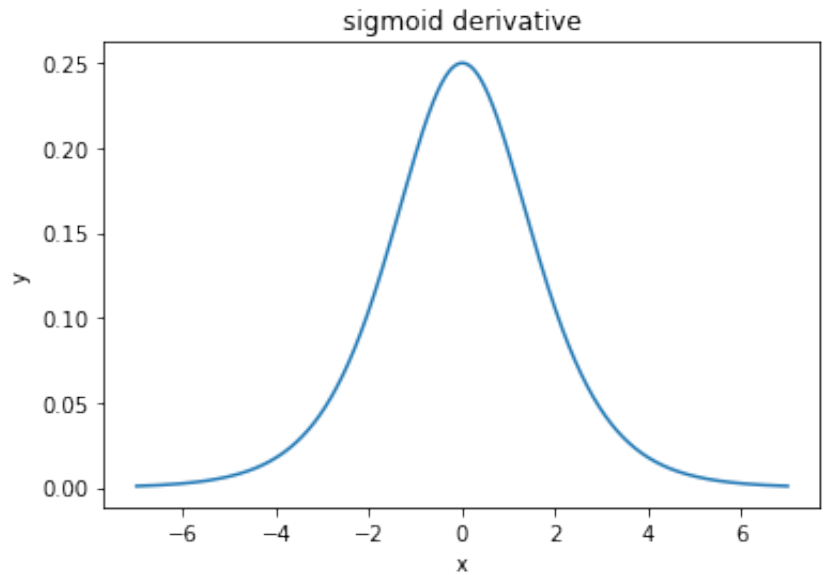
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad x \geq a \\ -1, & \text{gdy} \quad x < a \end{cases}$$

Funkcje aktywacji

- **sigmoidalna** (unipolarna) - ograniczona $f(x) \in (0, 1)$

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \qquad f'(x) = f(x)(1 - f(x))$$



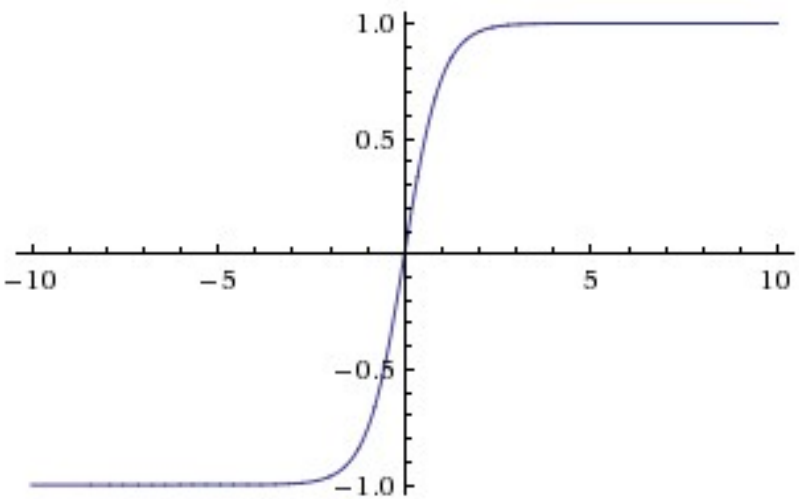


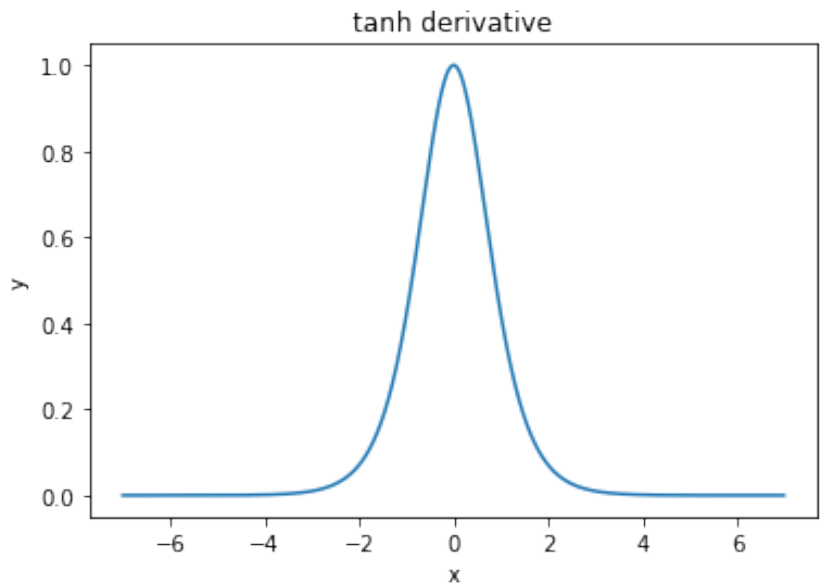
Rys: http://cs231n.github.io/

Funkcje aktywacji

- **tangens hiperboliczny** (bipolarna) - ograniczona
  $f(x) \in (-1, +1)$

$$f(x) = \tanh x = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} \qquad f'(x) = 1 - f^2(x)$$





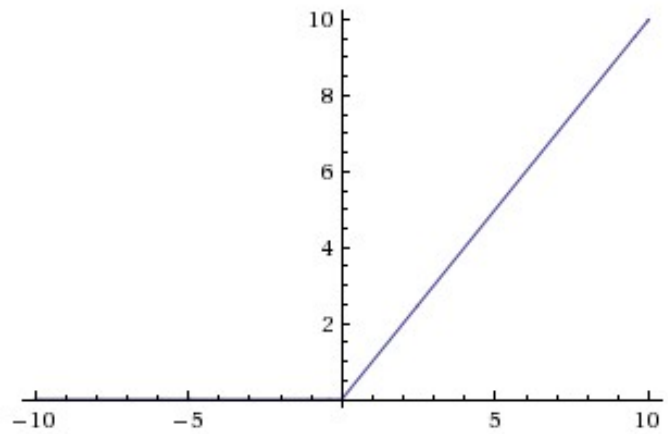
Rys: http://cs231n.github.io/,
https://www.kaggle.com/moriano/a-showcase-of-how-relus-can-speed-up-the-learning

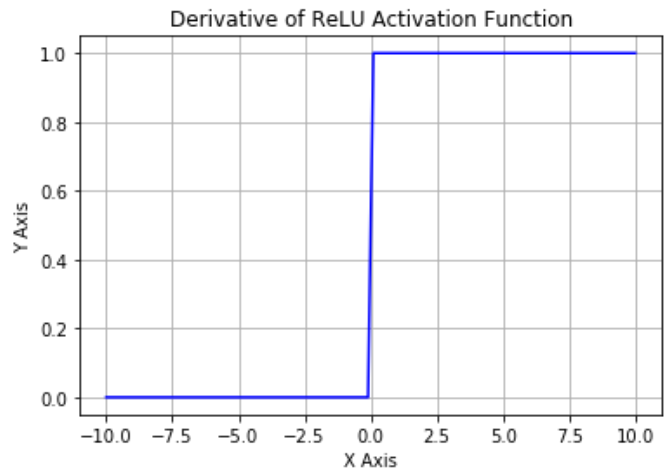
Funkcje aktywacji

- **ReLU** (Rectified Linear Unit) - fragmentami ciągła, brak pochodnej w 0

$$f(x) = \max(0, x) = \begin{cases} x, & \text{gdy} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{gdy} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad x > 0 \\ 0, & \text{gdy} \quad x < 0 \end{cases}$$





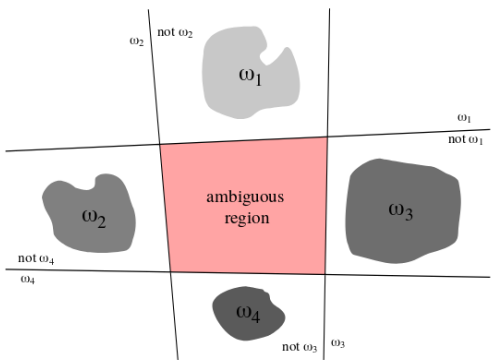
Rys: http://cs231n.github.io/,
https://learnopencv.com/understanding-activation-functions-in-deep-learning/

Klasyfikacja wielu klas

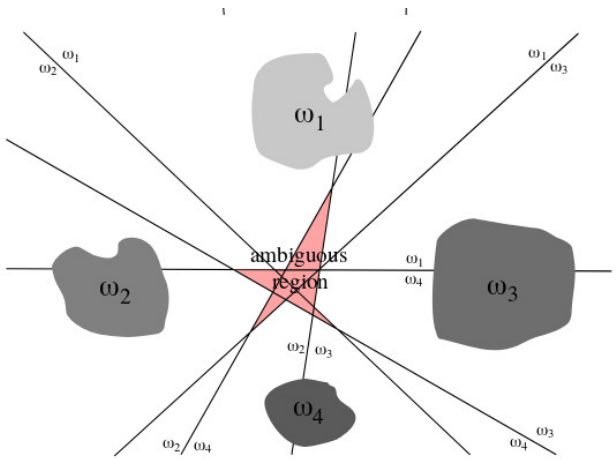
W przypadku wieloklasowym, gdy $y_i = 1, 2, 3, ..., k$

Model składający się z wielu klasyfikatorów binarnych:

one vs. rest



one vs. one



error correction codes

#	Code				
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
2	0	1	0	1	1
3	0	1	1	0	1
4	1	0	0	1	1
5	1	0	1	0	0
6	1	1	0	0	0
7	1	1	1	1	1

8 classes, code-length = 5

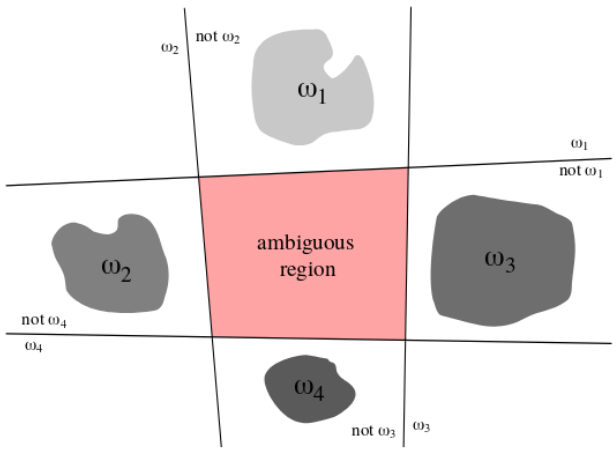
Rys: Duda and Hart, Pattern Recognition
Vivek Srikumar, Structured Prediction, Spring 2021

one vs. rest

Trening: k perceptronów prostych, po jednym na każda klasę klasę. Pojedynczy perceptron separuje przypadki z pojedynczej klasy od pozostałych przypadków.

Predykcja: zwycięzca bierze wszystko

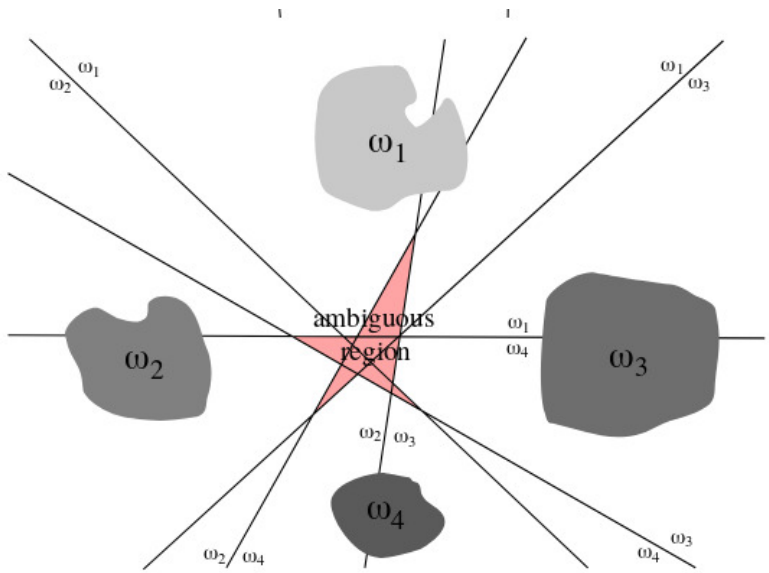
$$\arg\max_i \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}$$



one vs. one

Trening: $k(k-1)/2$ perceptronów dla każdej pary klas

Predykcja: głosowanie większościowe, każda klasa otrzymuje $k-1$ głosów. Wybieramy klasę o największej liczbie pozytywnych odpowiedzi.



error correction codes

- każdą etykietę klasy kodujemy (losowym) ciągiem bitowym o długości $n > \log k$
- dodatkowe bity ponad $\log k$ działają jak kody korekcyjne błędy, im większe n tym lepsza korekcja kodów

Trening: trenujemy $n > \log k$ perceptronów, po jednym dla każdego bitu.

Predykcja: wybieramy klasę o najmniejszej odległości Hamminga między odpowiedzią n perceptronów a ciągiem kodującym klasę

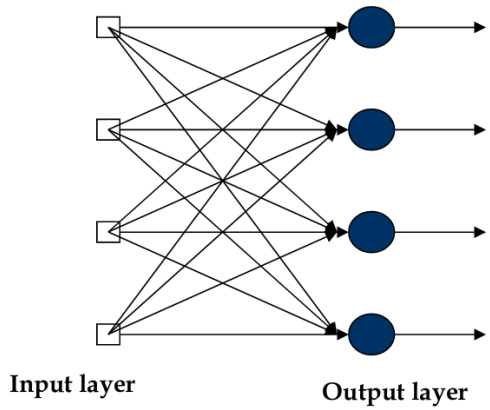
#	Code				
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
2	0	1	0	1	1
3	0	1	1	0	1
4	1	0	0	1	1
5	1	0	1	0	0
6	1	1	0	0	0
7	1	1	1	1	1

8 classes, code-length = 5

Maszyna liniowa

Jednowarstwowa sieć liniowa klasyfikująca do k grup

- sieć jednowarstwowa - liczba wyjść równa liczbie klas



- funkcja dyskryminująca

$$f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0}$$

- klasyfikacja: przypisanie wektorowi $\mathbf{x}$ klasy i odpowiadającej wyjściu f_i o największej wartości

$$f_i(\mathbf{x}) > f_k(\mathbf{x}) \quad \text{dla każdego} \quad i \neq k$$

Algorithm Uczenie maszyny liniowej

Input: zbiór wektorów należących do jednej z k klas

Output: klasyfikator separujący wektory treningowe

1: zainicjuj losowo wagi $\mathbf{w}_i$
2: **for** losowo wybranego **x do**
3: **if x** należący do klasy i jest niepoprawnie przypisany do klasy j **then**
4: $\mathbf{w}_i \leftarrow \mathbf{w}_i + \mathbf{x}$
5: $\mathbf{w}_j \leftarrow \mathbf{w}_j - \mathbf{x}$
6: **return** $\mathbf{w}, w_0$