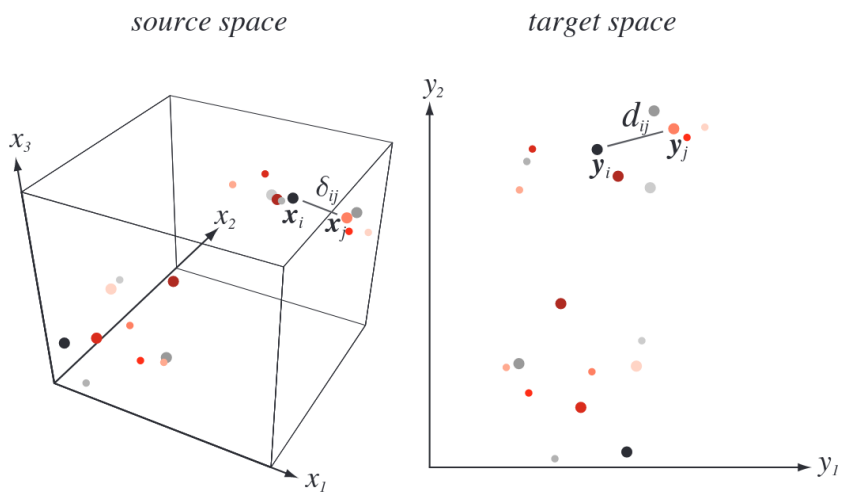
SOM vs MDS

MDS

Multi-Dimensional Scaling (MDS) (Thorton 1954, Kruskal 1964), zwane także mapowaniem Sammona (Sammon 1964)

- redukcja wymiarowości z zachowaniem relacji odległości, zazwyczaj redukcja do 2D, 3D w celu wizualizacji
- szukamy mapowania $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ (gdzie $k < d$) minimalizującego **funkcję stresu** określającą miarę zniekształceń topograficznych



Rys: Duda, Hart, Pattern Classification

Algorytm MDS

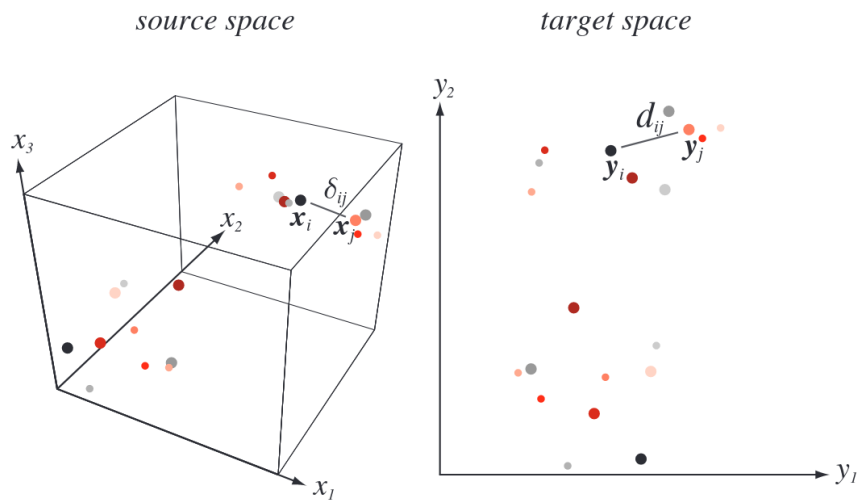
Przestrzeń cech $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, 2, \ldots, n$
Przestrzeń docelowa $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^k$, gdzie $d < k$
Odległość w przestrzeni cech i w przestrzeni docelowej

$$\delta_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \qquad d_{ij} = \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|$$

Można użyć dowolnej metryki (najczęściej metryka Euklidesowa)

Funkcja stresu (Kruskal)

$$E = \sum_{i<j}^{n} (\delta_{ij} - d_{ij})^2$$



Optymalizacja $k \cdot n$ parametrów (współrzędnych $\mathbf{y}_i$)

Miary MDS

Funkcja stresu Kruskala

$$E_1 = \sum_{i<j}^{n} (\delta_{ij} - d_{ij})^2 \geq 0$$

- zachowuje ogólną strukturę klastrów (skupisk)
- minimum w 0 gdy $d_{ij} = \delta_{ij}$
- mogą dominować duże wartości odległości δ_{ij},

Odwzorowanie Sammona

$$E_2 = \frac{1}{c} \sum_{i<j}^{n} \frac{(\delta_{ij} - d_{ij})^2}{\delta_{ij}} \geq 0 \qquad \text{gdzie} \qquad c = \frac{1}{\sum_{i<j} \delta_{ij}}$$

- wpływ dużych odległości δ_{ij} jest zredukowany

MDS i SOM

SOM

- nie gwarantuje wiarygodnej aproksymacji gęstości danych
- brak minimalizowanej funkcji, uczenie samoorganizujące się na zasadzie konkurencji
- wiele innych zastosowań, np. klasyfikacja

MDS

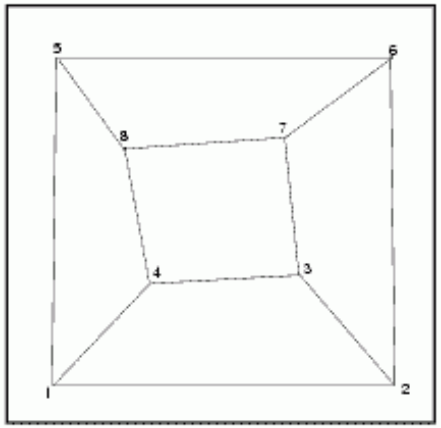
- redukcja wymiarowości z zachowaniem relacji odległości
- brak funkcji mapującej $f : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$
- dodanie nowego punktu treningowego $\mathbf{x}_i$ wymaga ponownej optymalizacji

SOM i MDS

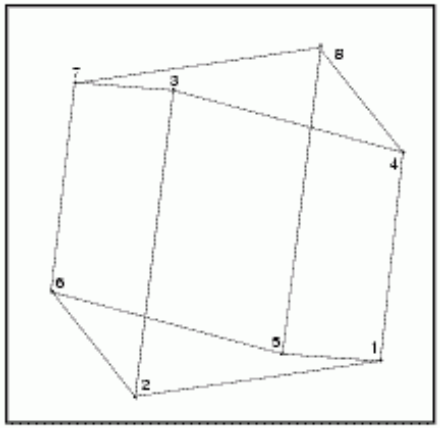
- wrażliwe na szum w danych i nieistotne cechy
- wyniki uzależnione od punktu startowego, każda optymalizacja może generować odmienne wyniki

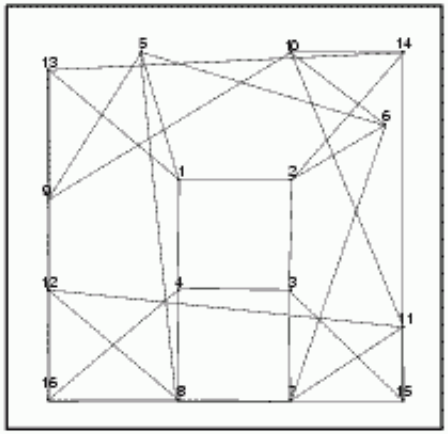
Wizualizacja: hiperkostka 3D i 4D

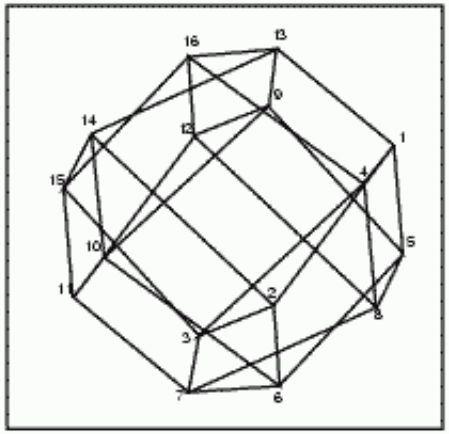
SOM warstwa 2D, 20x20



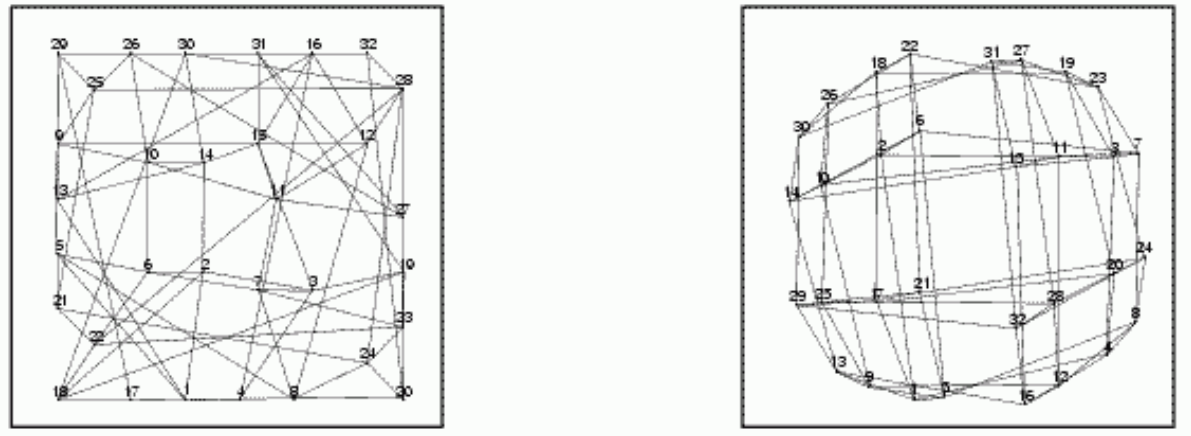
MDS

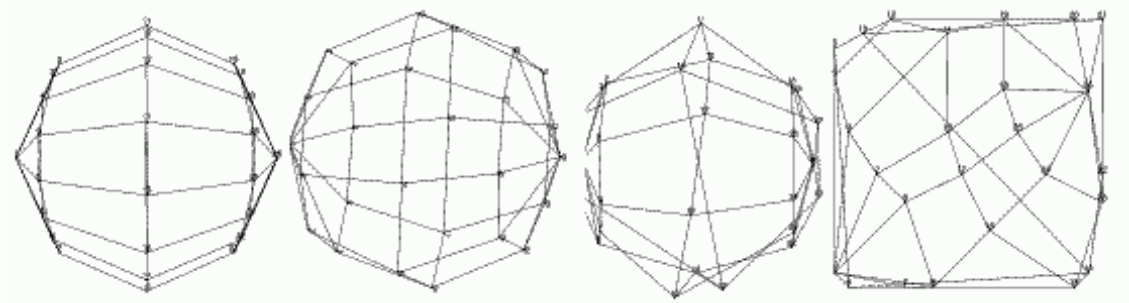






Wizualizacja: hiperkostka 5D, punkty na sferze w 3D





The two-dimensional representations of the 26 points on the sphere obtained by minimization of S, E, A, and by **SOFM** (left to right) with a 20 x 20 neurons map.

Mapy semantyczne

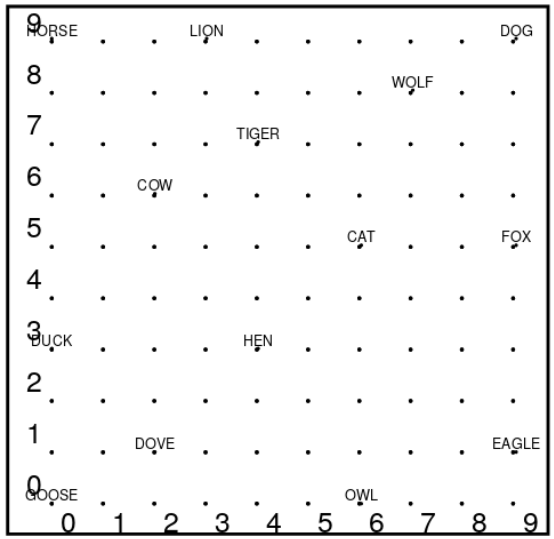
- próba uchwycenia sensu słów i pojęć poprzez własności oraz relacji semantycznych
- Przykład: 8 ptaków i 8 ssaków
  dove, hen, duck, goose, owl, hawk, eagle,
  fox, dog, wolf, cat, tiger, lion, horse, zebra, cow.
- każde pojęcie opisane 13 cechami binarnymi
  size is: small, medium large;
  has 2 legs, 4 legs,
  has hair, hoofs, mane, feathers;
  likes to: hunt, run, fly, swim.
- utwórz zdania opisujące zwierzęta za pomocą wybranych cech
  Horse is big, has 4 legs, mane, hair, hoofs, likes to run.

Mapy semantyczne

	animal	dove	hen	duck	goose	owl	hawk	eagle	fox	dog	wolf	cat	tiger	lion	horse	zebra	cow
	small	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
is	medium	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	big	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
	2 legs	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	4 legs	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
has	hair	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	hooves	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
	mane	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0
	feathers	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	hunt	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
likes	run	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0
to	fly	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	swim	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Mapy semantyczne

SOM (Ritter & Kohonen 1989)



MDS (Naud & Duch, 1996))

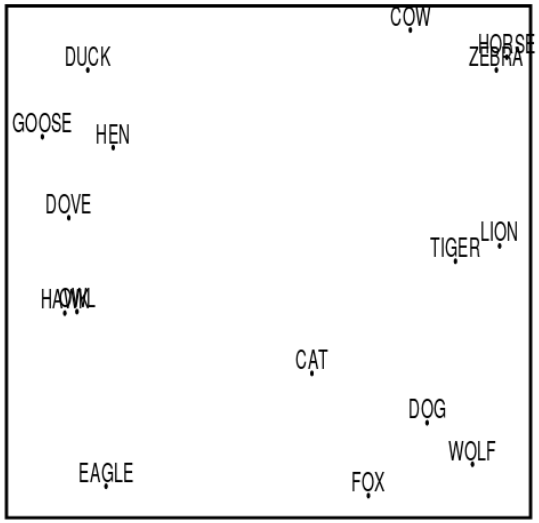


FIG. 1. The two-dimensional representations of the 13-dimensional semantic data obtained by SOM (left) with a 10 x 10 neurons map, a training of 10000 cycles, with final stress of 0.25, and the MDS (right) with final stress of 0.20 after 10 iterations.

Naturalna klasyfikacja zwierząt zachowująca ich podobieństwo

- ssaki odseparowane od ptaków
- małe zwierzęta od dużych
- drapieżniki od roślinożerców

Podobieństwo zwierząt jest powiązane z odległością na mapie

Samoorganizacja

Uczenie hebbowskie

Samoorganizacja

- **uczenie nienadzorowane**: wykrywa samoistnie (bez nadzoru) istotne cechy powiązań między sygnałami
- globalne uporządkowanie sieci jest możliwe przez działania samoorganizujące prowadzone **lokalnie** w różnych punktach sieci, niezależnie od siebie
- pewne neurony lub grupy neuronów **współpracują** lub/i **konkurują** ze sobą specjalizując w wykrywaniu określonych wzorców

Sieci samoorganizujące się

Uczenie konkurencyjne

- reguła Kohonena
- konkurencja WTA, WTM
- kwantyzacja wektorowa, SOM

Uczenie hebbowskie

- reguła Hebba, reguła Oja
- asocjacje i korelacje między sygnałami
- dekompozycja składowych głównych PCA (Principal Component Analysis)
- dekompozycja na składowe niezależne ICA (Independent Component Analysis) , separacja źródeł BSS (Bling Source Separation), nielinowe PCA, ...

Reguła Hebba (1949)

„Neurons, that fire together, wire together."

Jeżeli neuron A jest cyklicznie pobudzany przez neuron B, to staje się on jeszcze bardziej czuły na pobudzenie tego neuronu

- synchroniczne pobudzanie neuronów A i B wzmacnia połączenie synaptyczne między nimi
- jeżeli neurony nie są pobudzane jednocześnie (asynchronicznie) to połączenie jest osłabiane

Zmiana wagi połączenia pomiędzy neuronami A i B

$$w_{AB}(k+1) = w_{AB}(k) + \eta y_A(k) y_B(k)$$

Reguła Hebba

Dla neuronu liniowego

$$y = \mathbf{w}^T \mathbf{x}$$

reguła Hebba przybiera postać

$$\Delta \mathbf{w} = \eta y \mathbf{x} = \eta \mathbf{x}\mathbf{x}^T \mathbf{w}$$

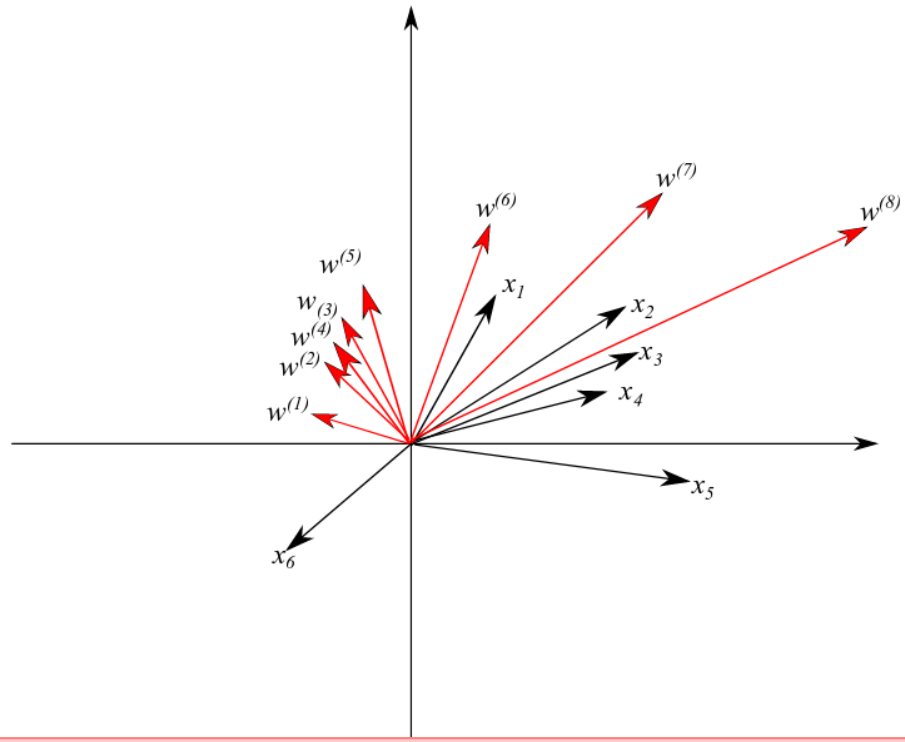
Decydujący wpływ na wartość końcową $\mathbf{w}$ będą miały sygnały zgrupowane (rozciągające się) wzdłuż znalezionego kierunku - maksymalizacja wariancji $\mathbf{w}^T \mathbf{x}$.

Przy prezentacji wielu próbek uczących wektor wag kumuluje wartości macierzy autokorelacji $\mathbf{R}$ wektorów $\mathbf{x}$

$$\Delta \mathbf{w} = \eta \mathbf{R} \mathbf{w} \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{R} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]$$

Interpretacja geometryczna reguły Hebba

Wektor wag przemieszcza się w kierunku wyznaczonym przez środek masy wektorów treningowych (maleje kąt pomiędzy kierunkiem największej wariancji danych)



Trening prowadzi do nieograniczonego wzrostu wag (norma $\|\mathbf{w}\|$ rośnie w każdym kroku)

Modyfikacje reguły Hebba

Zapobieganie nieograniczonemu wzrostowi wag:

- sztywne granice

$$w_{min} < w_i < w_{max}$$

- miękkie granice

$$\Delta w_i = \eta x_i y (w_i - w_{min})(w_{max} - w_i)$$

- normalizacja wag po każdym kroku uczenia
- dodanie czynnika normalizującego wagi, np. reguła Oji (1982)

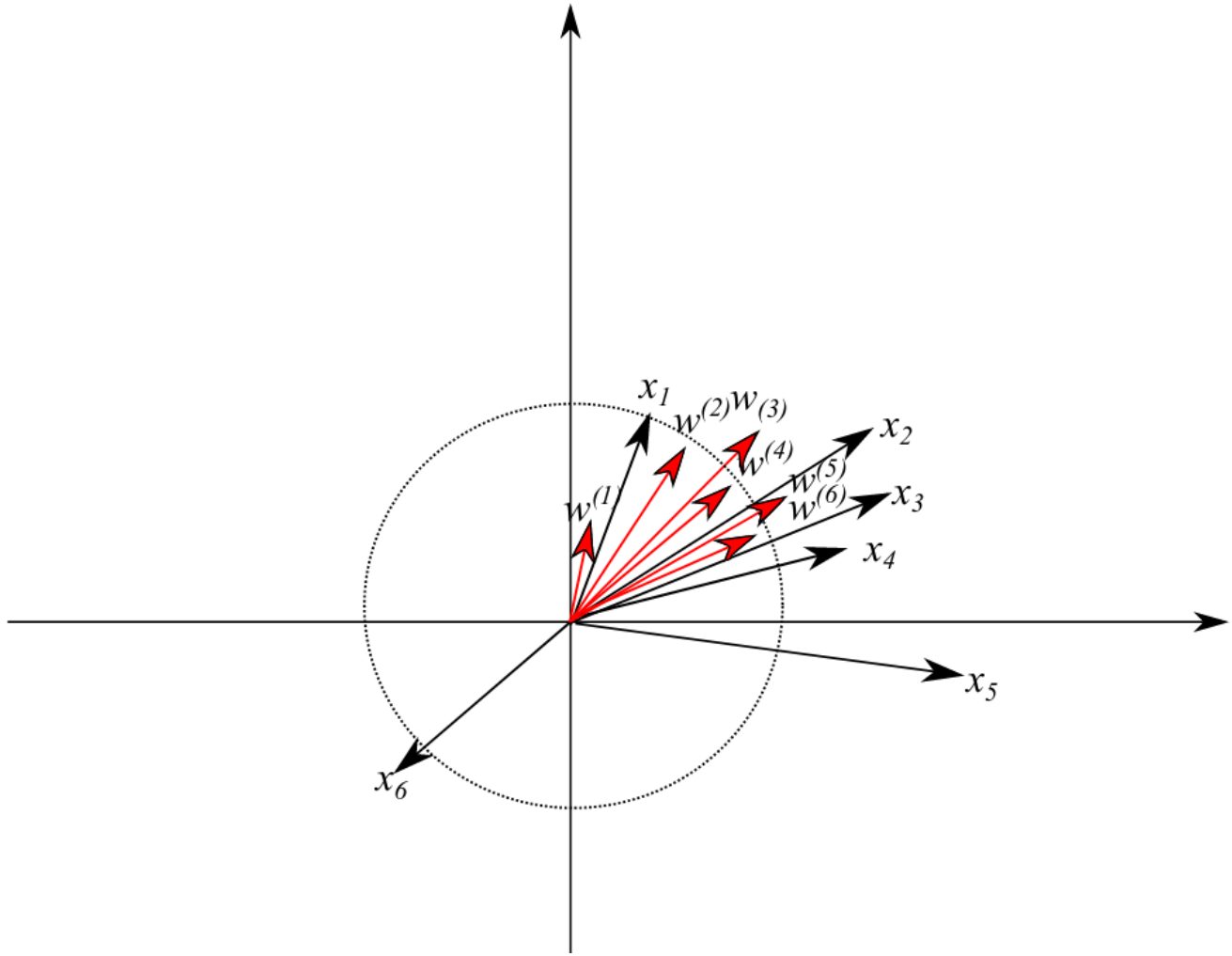
$$\Delta w_i = \eta y \left(x_i - y w_i\right)$$

Reguła Oji

$$\Delta \mathbf{w} = \eta \left(y\mathbf{x} - \alpha y^2 \mathbf{w} \right)$$

- dodanie wyrazu zanikania wagi proporcjonalnego do y^2
- adaptacja prowadzi do unormowania wag $\|\mathbf{w}\| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$
- wektor wag zbliża się do wektora własnego macierzy kowariancji $E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T]$ o największej wartości własnej
- wektor wag leży wzdłuż kierunku maksymalizującego wartość oczekiwaną y^2 (wariancja wartości wyjściowej neuronu)

Interpretacja geometryczna reguły Oji



Własności reguły Oji

Dla wyuczonego wektora wag wartość oczekiwana zmian dla wszystkich wektorów uczących

$$E[\Delta \mathbf{w}] = 0$$

stąd

$$E[\Delta \mathbf{w}] = \eta E[y(\mathbf{x} - y\mathbf{w})] = \eta E[(\mathbf{w}^T\mathbf{x})\mathbf{x} - y^2\mathbf{w}]$$
$$= \eta \left(E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]\mathbf{w} - E[y^2]\mathbf{w}\right) = 0$$

Macierz kowariancji $E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = \mathbf{R}_x$.
Oznaczmy $\lambda = E[y^2]$

Reguła Oji prowadzi do wyznaczenia wektora własnego $\mathbf{w}$ macierzy kowariancji $\mathbf{R}_x$

$$\mathbf{R}_x\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$$

Normalizacja wag

$$\lambda = E[y^2] = E[(\mathbf{w}^T\mathbf{x})(\mathbf{w}^T\mathbf{x})] = \mathbf{w}^T E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]\mathbf{w} = \mathbf{w}^T\mathbf{R}_x\mathbf{w}$$

ponieważ

$$\mathbf{R}_x\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$$

stąd

$$\lambda = \mathbf{w}^T\lambda\mathbf{w} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{w}\| = 1$$

Dodatkowy czynnik ogranicza wartość wag.

Analiza składowych głównych PCA

Transformacja liniowa

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

gdzie

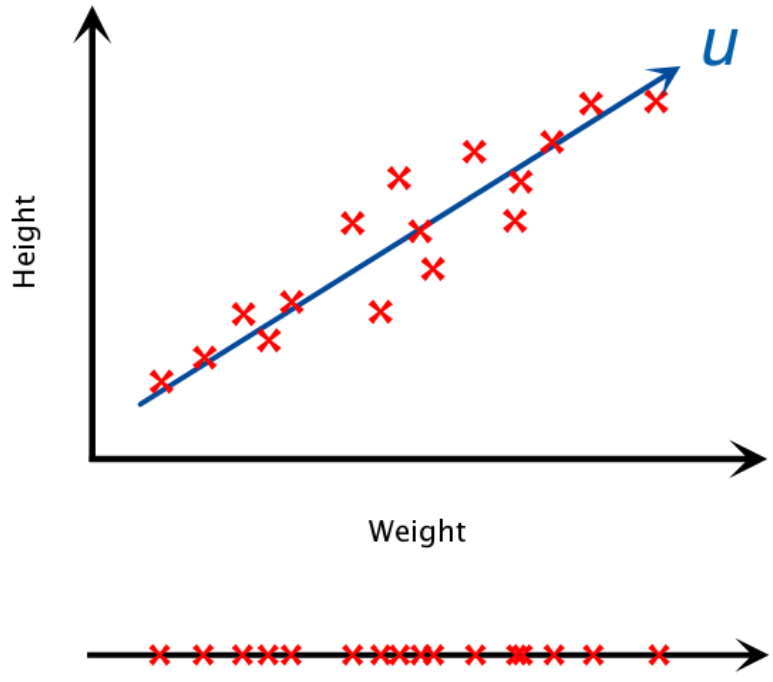
$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \qquad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^K \quad \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{K \times N} \qquad K < N$$

Redukcja wymiarowości z zachowaniem maksymalnej informacji zawartych w danych.

W PCA kierunek zawierający najwięcej informacji to kierunek o największej wariancji

Projekcja danych na wektor wag

Projekcja danych 2D na kierunek o największej wariancji



Rys: Boedecker, Machine Learning Summer 2015

PCA

Niech $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^N$ wektor losowy o zerowej wartości oczekiwanej, wówczas wartość oczekiwana macierzy kowariancji

$$R_x = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T]$$

dla skończonej próbki o liczebności p

$$R_x \approx \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T$$

PCA

Wartości własne λ_i oraz wektory własne $\mathbf{w}_i$ macierzy kowariancji

$$\mathbf{R}_x \mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i \qquad i = 1, \ldots, N$$

R jest symetryczna i nieujemna $\Rightarrow$ wartości własne rzeczywiste i nieujemne
Niech

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_N \geq 0$$

Ograniczając do K pierwszych składowych

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k]^T$$

otrzymujemy transformację PCA

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

PCA

Wariancja wzdłuż i-tego kierunku

$$Var(\mathbf{w}_i^T \mathbf{x}) = E[(\mathbf{w}_i^T \mathbf{x} - E[\mathbf{w}_i^T \mathbf{x}])^2] = E[(\mathbf{w}_i^T \mathbf{R}_x \mathbf{w}_i)] = \lambda_i$$

Celem PCA jet znalezienie wektorów $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_K$, które maksymalizują wariancję przy zachowaniu ortogonalności

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_j = 0 \quad \text{dla} \quad j \geq i$$

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i = 1$$

Algorytm PCA

1. Wyśrodkowanie danych dla każdej cechy j

$$x_{ij} \leftarrow x_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

2. Wyznaczenie macierzy kowariancji

$$\mathbf{R}_x = \frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{X}^T$$

3. Diagonalizacja za pomocą rozkładu SVD

$$\mathbf{S} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{R}_x\mathbf{W}$$

   $\mathbf{W}$ zawiera wektory własne, $\mathbf{S}$ wartości własne na diagonali

4. Projekcja danych na kierunki wektorów własnych odpowiadającym K największym wartościom własnym

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{W}_K\mathbf{x}_i$$

Rekonstrukcja

Rekonstrukcja obrazu wejściowego

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{W}^T \mathbf{y}$$

PCA minimalizuje błąd rekonstrukcji

$$E_r = E[\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2]$$

dla k składowych PCA

$$E_r = \sum_{i=k+1}^{N} \lambda_i$$

Minimalizacja E_r odpowiada maksymalizacji $\sum_{i=1}^{K} \lambda_i$

PCA

- Gdy zmienne są skorelowane to znajomość tylko części zmiennych pozwala określić pozostałe
- Względny wkład poszczególnych składowych

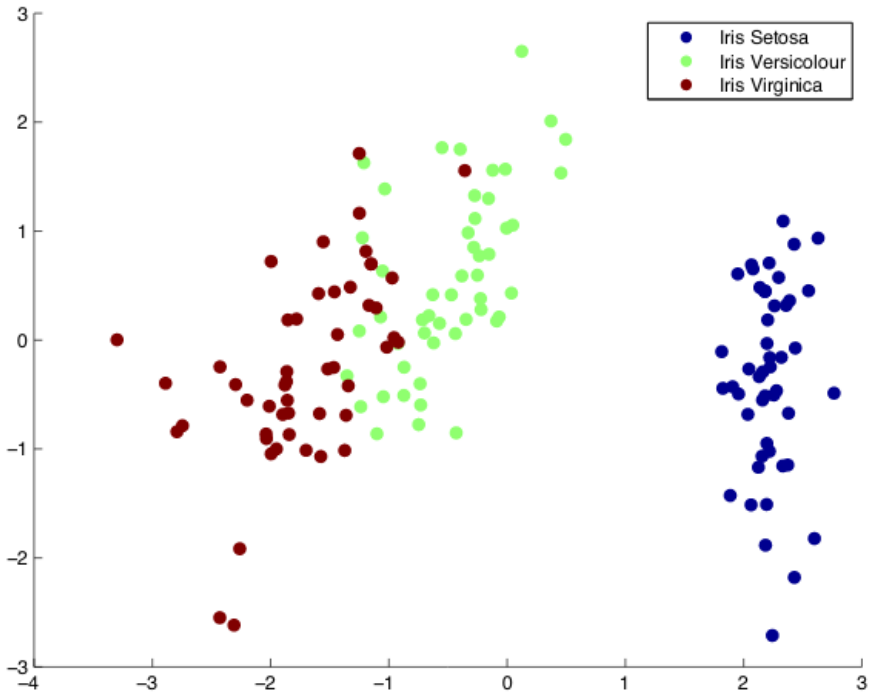
$$m_i = \frac{\lambda_i}{\sum \lambda_j}$$

- Standardowe metody wyznaczania wektorów własnych macierzy $\mathbf{R}_x$ dla dużych wymiarów są zbyt złożone

Metody adaptacyjne wyznaczania składowych głównych (np. reguła Oji)

- nie wymagają obliczania macierzy $\mathbf{R}_x$
- mogą być stosowane w metodach on-line, gdy nie mamy dostępu do wszystkich danych jednocześnie

Przykład: PCA na danych Iris

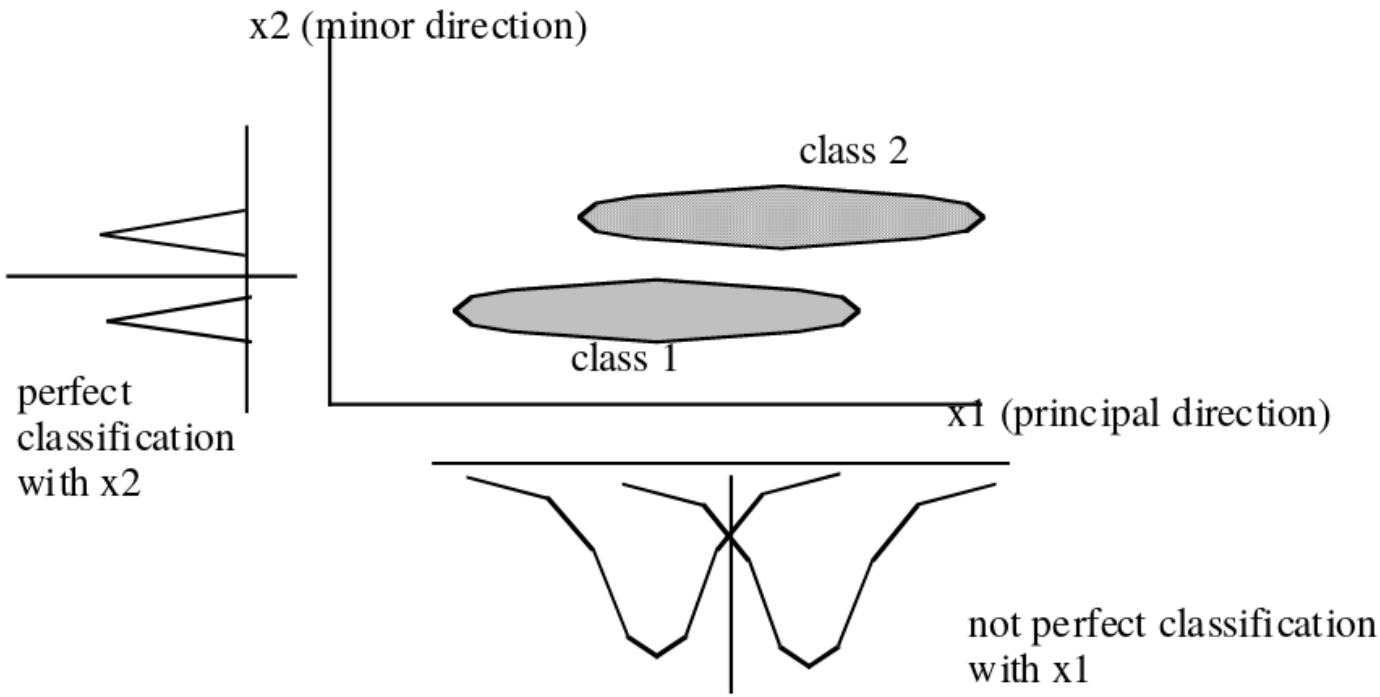


$$\lambda_1 = 2.8914 \quad \lambda_2 = 0.9151 \quad \lambda_3 = 0.1464 \quad \lambda_4 = 0.0205$$

PCA często używane do przetworzenia danych przed treningiem algorytmów uczenia maszynowego

Rys: Boedecker, Machine Learning Summer 2015

PCA i klasyfikacja



Projekcja PCA nie gwarantuje uzyskania najlepszej dyskryminacji

Rys: Principe, Neural and Adaptive Systems

MDS i PCA

- MDS wynik zależny od punktu startowego, stosowany wielokrotny start
- PCA może zostać użyte jako punkt startowy dla MDS. Nieistotne składowe są usuwane i nie mają wpływu na wizualizację MDS.
- PCA jest linowe, nie zachowuje odległości pomiędzy obiektami
- PCA wymaga utworzenia macierzy korelacji $d \times d$, koszt $O(nd^2)$, diagonalizacja tej macierzy $O(d^3)$
- MDS wymaga obliczenia macierzy odległości $O(n^2 d)$ i minimalizacji $2n - 3$ parametrów

Trening pierwszego kierunku

Estymator pierwszego kierunku

$$y_1 = \mathbf{w}^T \mathbf{x} = \sum_{j=0}^{N} w_{1j} x_j$$

za pomocą reguły Oja

$$\mathbf{w}_1(k+1) = \mathbf{w}_1(k) + \eta(k) y_1(k) \left(\mathbf{x}(k) - \mathbf{w}_1(k) y_1(k)\right)$$

Dobór $\eta(k)$ jest istotny - powinien maleć z czasem, np,:

$$\eta(k) = \frac{\eta(0)}{k^\gamma} \qquad \text{gdzie} \qquad 0.5 \leq \gamma \leq 1$$

Sieci neuronowe uczone regułą Hebba

W warstwie składającej się z neuronów liniowych uczonych regułą Hebba wszystkie neurony będą zbiegały do kierunku maksymalizującego wariancję.

Mechanizmy konkurencji wymuszające różnorodność rozwiązań

- WTA, zwycięzca bierze wszystko, tylko neuron z najsilniejsza aktywacją podlega uczeniu
- WTM, grupa k najbardziej wzbudzonych neuronów podlega adaptacji
- wymuszenie ortogonalności między wektorami wag, uogólniona reguła Hebba (GHA)
- dodanie połączeń ze sprzężeniem zwrotnym wpływającymi na pobudzenia sąsiednich neuronów, np. APEX

Uogólniony algorytm hebbowski (GHA)

Jednowarstwowa sieć liniowa (Sanger, Oja, 1989)

$$y_i = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}$$

Reguła uczenia Sangera z czynnikiem ortogonalizującym Grama-Schmidta

$$\Delta \mathbf{w}_i = \eta y_i \left(\mathbf{x}_i - \sum_{k=1}^{i} y_k \mathbf{w}_k \right)$$

oznaczając

$$\hat{\mathbf{x}}_i(k) = \mathbf{x}_i - \sum_{k=1}^{i-1} y_k \mathbf{w}_k$$

otrzymujemy lokalną regułę Oji dla przeskalowanych wejść $\hat{\mathbf{x}}_i$

$$\Delta \mathbf{w}_i = \eta y_i \left(\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{w}_i y_i \right)$$

Wartości wag $\mathbf{w}_i$ kolejnych neuronów uzyskują wartości kolejnych wartości własnych macierzy kowariancji $\mathbf{R}$ (kolejne składowe główne).

Uczenie anty-hebbowskie

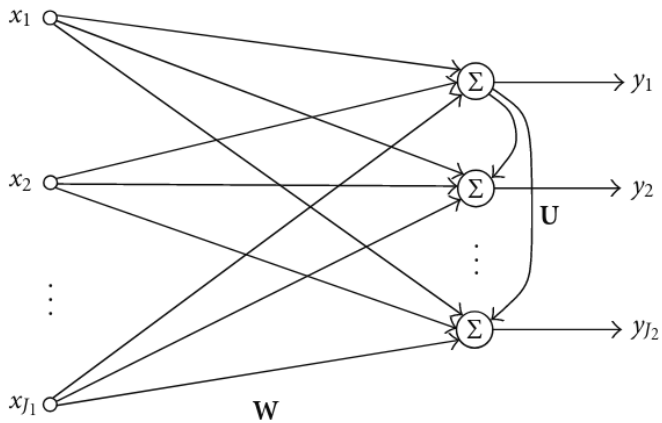
Reguła anty-Hebbowska

$$\Delta w_{ij} = -\eta x_i y_j$$

- znak minus sprawia, że trening prowadzi do znalezienia kierunku **minimalizującego** wariancję wyjścia
- uczenie jednostki liniowej prowadzi do zerowania wyjścia - trening dąży do znalezienia projekcji danych do punktu
- jeżeli nie ma kierunku, wzdłuż którego wariancja wynosi 0 to wagi zbiegają do 0

APEX

Adaptive Principal Component Extraction (Diamantaras 1990)
Dla danych wektorów $\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w}_{i-1}$ realizujących kierunki PCA sieć iteracyjnie wyznacza i-tą składową PCA



$$\mathbf{y} = \mathbf{W}^T \mathbf{x}$$

$$y_i = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + \mathbf{u}_i^T \mathbf{y}$$

$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{i-1})^T$ wyjścia pierwszych $i-1$ neuronów
$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{i-1}]^T$ macierz wag pierwszych $i-1$ neuronów
$\mathbf{u}_i = [u_{1i}, u_{2i}, \ldots, u_{(i-1)i}]^T$ wagi połączeń wewnątrz warstwy

Rys: Qiu, et.al., Neural Network Implementations for PCA and Its Extensions

Aktualizacja wag APEX

Aktualizacja wag $\mathbf{w}_i$ za pomocą reguły Oji

$$\Delta \mathbf{w}_i = \eta(n) y_i(n) \left[\mathbf{x}(n) - y_i(n) \mathbf{w}_i \right]$$

Połączenia między-warstwowe u_{ij} uczone reguła anty-hebbowską odpowiedzialną za ortogonalizację y_i względem poprzednich składowych

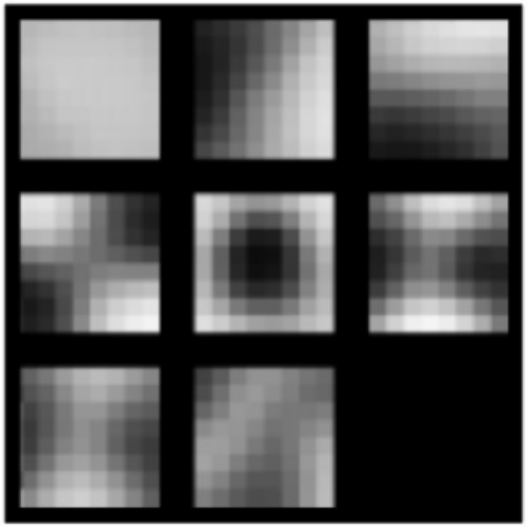
$$\Delta \mathbf{u}_i = -\eta(n) y_i(n) \left[\mathbf{y}(n) + y_i(n) \mathbf{u}_i \right]$$

Zastosowanie PCA

- Redukcja wymiarowości
- Wizualizacja danych nD $\rightarrow$ 2D, 3D
- Usuwanie szumu
- Usuwanie korelacji z danych
- Kompresja sygnału, np. kompresja obrazów
- Dane po transformacji PCA często używane do treningu algorytmów uczenia maszynowego

Kompresja danych za pomocą PCA

Wektory treningowe to ramki obrazu (8x8 = 64 współrzędne)
Przykład: obraz 512x512 z 8 bitami na piksel



ordering of the neurons:

neuron 0	neuron 1	neuron 2
neuron 3	neuron 4	neuron 5
neuron 6	neuron 7	(unused)

Neurony w kolejności zawierającej najwięcej informacji potrzebnej do rekonstrukcji

- neuron 0: średni poziom szarości
- neuron 1 i 2: gradient obrazu
- neurony 3-5: pochodna drugiego rzędu obrazu

Rys: Krose, Smagat, An Introduction to Neural Networks, 1996

Przykład: Kompresja obrazu za pomocą APEX

a) oryginał
b) 4 PC
c) 8 PC
d) 12 PC

Rys: Krose, Smagat, An Introduction to Neural Networks, 1996

Sieci Heuaulta-Juttena

- liniowe sieci samooganizujące oparte o regułę uczenia Hebba uogólnioną do funkcji nieliniowych
- pierwotnie stosowane do ślepej separacji sygnałów, używane również do analizy składników niezależnych (ICA), składników głównych (PCA), dekonwolucji
- struktura sieci rekurencyjna lub jednokierunkowa
- przetwarzanie sygnałów w czasie rzeczywistym
- funkcje nieliniowe bardzo istotne w procesie adaptacji ale nie wpływają na strukturę sieci

Separacja sygnałów

Dla n niezależnych sygnałów źródłowych $s_i(t)$ dostępne są tylko sygnały $x_i(t)$ będące liniową superpozycją sygnałów oryginalnych $s_i(t)$

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_j(t)$$

Macierz mieszająca

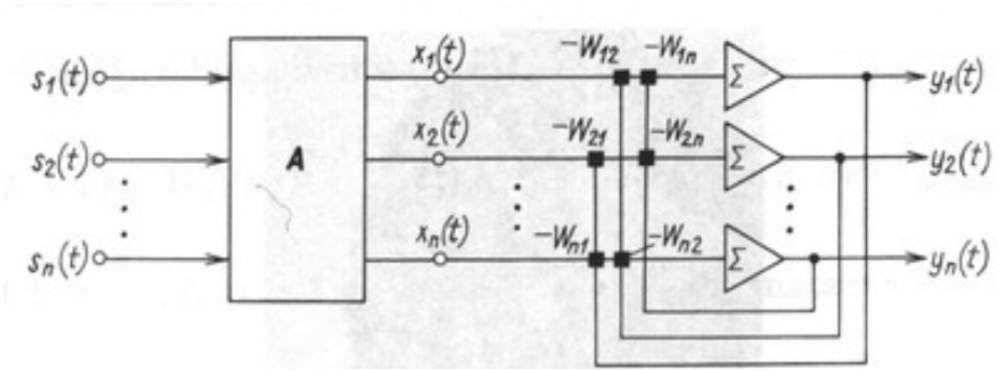
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

W notacji macierzowej

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t)$$

Ślepa separacja źródeł (BSS): zadanie odzyskania oryginalnych komponentów sygnału $\mathbf{s}(t)$ przy nieznanych $\mathbf{A}$ jak i $\mathbf{s}(t)$.
Przykład: *coctail party problem*

Sieci rekurencyjna Heuaulta-Juttena



Działanie realizowane przez siec

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \mathbf{W}\boldsymbol{y}(t)$$

gdzie macierz wag (w oryginalnej wersji sieci)

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 0 & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & 0 & \cdots & w_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Szukamy rozwiązania

$$\mathbf{y}(t) = (1 + \mathbf{W})^{-1}\mathbf{x}(t)$$

które odtwarza sygnał pierwotny $\mathbf{s}(t)$.
Warunki:

- odtwarzanie z dokładnością do skali

  $$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{D}\boldsymbol{s}(t)$$

  gdzie $\mathbf{D}$ jest macierzą diagonalną
- odtwarzanie z dokładnością do kolejności sygnałów

  $$\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}\mathbf{s}(t)$$

  gdzie $\mathbf{P}$ jest macierzą permutacji

Dla małej liczby kanałów ($n = 2$) istnieje rozwiązanie analityczne.
Dla większej liczby kanałów stosuje się metodę adaptacyjną.

Reguła Heraulta-Juttena

Przy założeniu statystycznej niezależności sygnałów można wyprowadzić regułę uczenia tożsamą z regułą Hebba

$$\frac{dW_{ij}}{dt} = \eta y_i(t) y_j(t)$$

Zbieżność procesu uczącego wymaga aby w stanie ustalonym $E[\frac{dW_{ij}}{dt}] = 0$ stąd sygnały $y_i(t)$ i $y_j(t)$ nie mogą być skorelowane $E[(y_i - E[y_i])(y_j - E[y_j])] = 0$

Reguła Heraulta-Juttena

$$\frac{dW_{ij}}{dt} = \eta(t) f\left(y_i(t)\right) g\left(y_j(t)\right)$$

$f()$ i $g()$ to funkcje nieparzyste, które przy założeniu statystycznej niezależności sygnałów zapewniają $E[f\left(y_i(t)\right) g\left(y_j(t)\right)] = 0$, co jest warunkiem zbieżności algorytmu uczenia.

Przykłady: $f(x) = x^3, x^5$, $g(x) = \tanh(x), \arctan(x), x, \mathrm{sgn}(x)$

Zmodyfikowany algorytm Cichockiego

Reguła Heuaulta-Juttena skuteczna tylko dla sygnałów $s_i(t)$ o niewielkim zróżnicowaniu amplitudy (dla względnej różnicy amplitud $< 10^2$). Sygnały o małej amplitudzie nie są separowane.

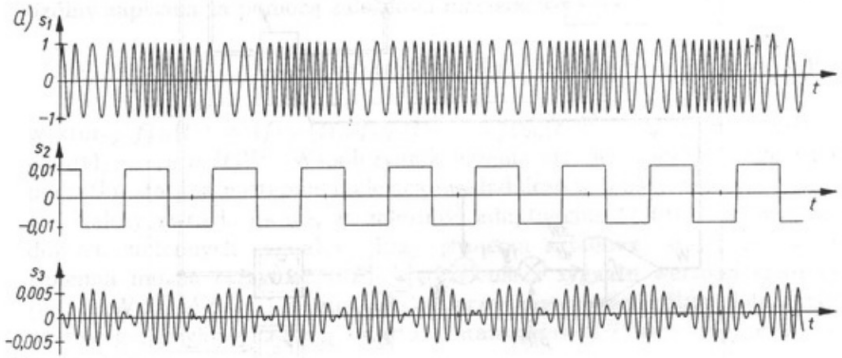
Modyfikacja Cichockiego

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} = \eta(t)\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}(t))]^T - \mathbf{1}\right]$$

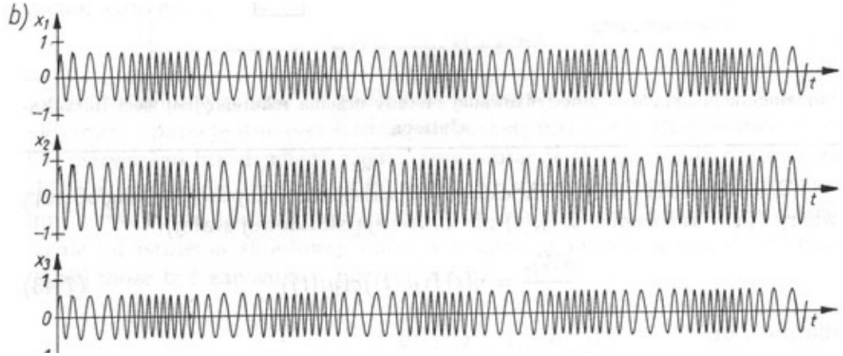
gdzie $\boldsymbol{y}(t) = (\mathbf{1} + \boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{x}(t)$

- wprowadza sprzężenia zwrotne własne neuronu $w_{ii} \neq 0$ powodujące samonormalizację sygnałów wyjściowych $y_i(t)$
- w stanie ustalonym $E[\frac{d\mathbf{W}}{dt}] = 0$ stąd $E[(f(y_i)g(y_j)] = 0$
- separacja możliwa nawet dla sygnałów o różnicy amplitud rzędu 10^{10}

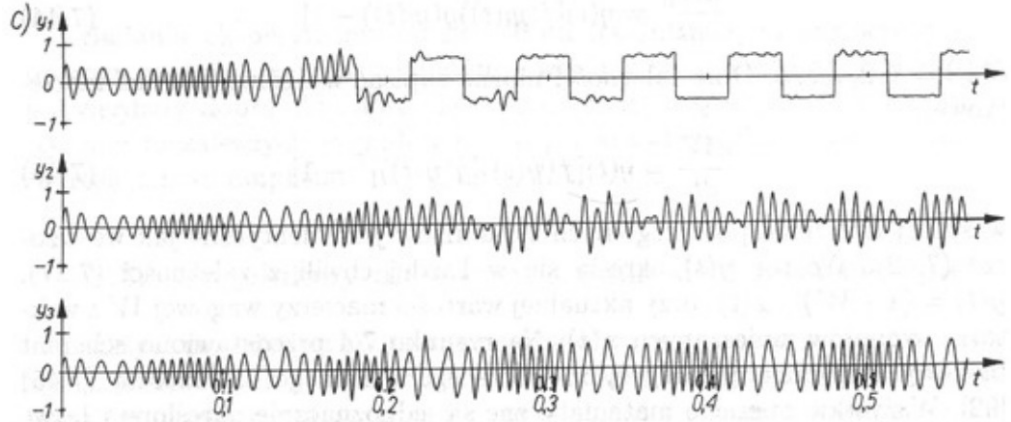
Sygnały oryginalne $s_i(t)$



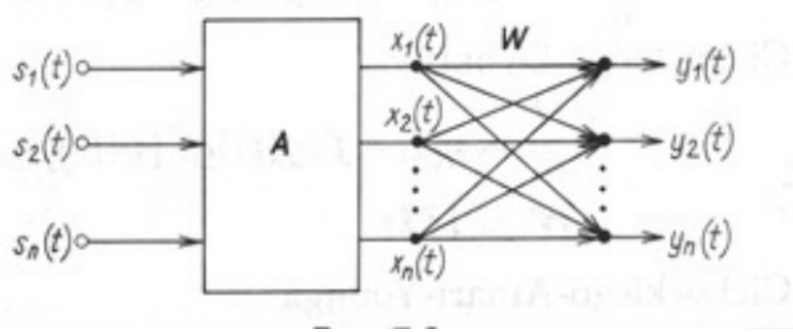
Sygnały zmieszane $x_i(t)$



Proces wydzielania sygnałów $y_i(t)$ odtwarzających sygnały źródłowe $s_i(t)$



Sieć jednokierunkowa



$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

macierz $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest macierzą pełną.

Sieć jednokierunkowa jest równoważna sieci ze sprzężeniami zwrotnymi gdy $\mathbf{W} = (\hat{\mathbf{W}} + \mathbf{1})^{-1}$ w której $\hat{\mathbf{W}}$ to macierz wag sieci rekurencyjnej
Zmodyfikowana reguła adaptacyjna Cichockiego

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} = \eta(t)\mathbf{W}\left[\mathbf{1} - \boldsymbol{f}(\mathbf{y}(t))[\boldsymbol{g}(\mathbf{y}(t))]^T\right]\boldsymbol{W}$$