Reprezentacja symboli w komputerze.

Liczby całkowite i zmiennoprzecinkowe.

Bity i kody binarne

- **Bit** (***bi**nary **d**igit*) najmniejsza ilość informacji $\{0, 1\}$, wysokie/niskie napięcie
- **Kod binarny** - grupa bitów reprezentująca zbiór symboli

1b	$\rightarrow$	2 symbole $\{0, 1\}$
2b	$\rightarrow$	4 symbole $\{00, 01, 10, 11\}$
8b	$\rightarrow$	$256 = 2^8$ symboli
n bitów	$\rightarrow$	2^n symboli

- Do zakodowania n symboli potrzeba co najmniej $\lceil \log_2 n \rceil$ bitów
- Ile bitów potrzeba do zakodowania alfabetu polskiego?

Kodowanie informacji

- **Bajt** (*byte*) $1\text{B} = 8\text{b}$ (zazwyczaj ...)
  Wg. standardu C: najmniejsza ilość adresowalnej pamięci
  Stała `CHAR_BIT` z pliku `limits.h`
  Najmniejsza porcja danych, którą może „ugryźć" komputer.
  Utożsamiany ze znakiem (typ `char`).
- Ile pamięci można zaadresować?
  $16\text{b} \rightarrow 2^{16}\text{B} = 64\text{KB}$
  $32\text{b} \rightarrow 2^{32}\text{B} = 4294967296\text{B} \sim 4\text{GB}$
  $64\text{b} \rightarrow 2^{64}\text{B} \sim 16\text{EB}$

- układ SI: $1\text{k} = 10^3 = 1000 \neq 1024 = 2^{10} = 1K$
- 1997 EIC, przedrostki dwójkowe - raczej nieużywane

IEC		podstawa						SI	
nazwa	symbol	2	16		różnica	10		nazwa	symbol
kibi	Ki	2^{10}	$16^{2.5}$	400_{16}	2,40%	1 024	$> 10^3$	kilo	k
mebi	Mi	2^{20}	16^{5}	$10\ 0000_{16}$	4,86%	1 048 576	$> 10^6$	mega	M
gibi	Gi	2^{30}	$16^{7.5}$	$4000\ 0000_{16}$	7,37%	1 073 741 824	$> 10^9$	giga	G
tebi	Ti	2^{40}	16^{10}	$100\ 0000\ 0000_{16}$	9,95%	1 099 511 627 776	$> 10^{12}$	tera	T
pebi	Pi	2^{50}	$16^{12.5}$	$4\ 0000\ 0000\ 0000_{16}$	12,59%	1 125 899 906 842 624	$> 10^{15}$	peta	P
eksbi	Ei	2^{60}	16^{15}	$1000\ 0000\ 0000\ 0000_{16}$	15,29%	1 152 921 504 606 846 976	$> 10^{18}$	eksa	E
zebi	Zi	2^{70}	$16^{17.5}$	$40\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000_{16}$	18,06%	1 180 591 620 717 411 303 424	$> 10^{21}$	zetta	Z
jobi	Yi	2^{80}	16^{20}	$1\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000_{16}$	20,89%	1 208 925 819 614 629 174 706 176	$> 10^{24}$	jotta	Y

http://www.wikipedia.org

Operator sizeof

Operator `sizeof` oblicza rozmiar w bajtach typu lub zmiennej.

Składnia

```
sizeof (typ)
sizeof zmienna
```

Przykład

```
int x = 10;
printf("%d\n", sizeof (int));
printf("%d\n", sizeof x);
```

Typowe użycie

```
int *x;
x = malloc(sizeof(int) * n);
```

```c
#include <stdio.h>
#include <limits.h>

struct s {
   int a;
   char b[100];
};

int main()
{
   int tab[5];

   printf("CHAR_BIT          = %d\n", CHAR_BIT);
   printf("sizeof (char)     = %d\n", sizeof (char));
   printf("sizeof (int)      = %d\n", sizeof (int));
   printf("sizeof (long)     = %d\n", sizeof (long));
   printf("sizeof (float)    = %d\n", sizeof (float));
   printf("sizeof (double)   = %d\n", sizeof (double));
   printf("sizeof (int *)    = %d\n", sizeof (int*));
   printf("sizeof (char *)   = %d\n", sizeof (char*));
   printf("sizeof (struct s) = %d\n", sizeof (struct s));
   printf("sizeof tab        = %d\n", sizeof tab);

   return 0;
}
```

☞ sizeof.c

```c
#include <stdio.h>
#include <limits.h>

struct s {
    int a;
    char b[100];
};

int main()
{
    int tab[5];

    printf("CHAR_BIT          = %d\n", CHAR_BI
    printf("sizeof (char)     = %d\n", sizeof
    printf("sizeof (int)      = %d\n", sizeof
    printf("sizeof (long)     = %d\n", sizeof (long));
    printf("sizeof (float)    = %d\n", sizeof (float));
    printf("sizeof (double)   = %d\n", sizeof (double));
    printf("sizeof (int *)    = %d\n", sizeof (int*));
    printf("sizeof (char *)   = %d\n", sizeof (char*));
    printf("sizeof (struct s) = %d\n", sizeof (struct s));
    printf("sizeof tab        = %d\n", sizeof tab);

    return 0;
}
```

Przykładowy wynik. Wyniki mogą być inne na różnych architekturach.

```
CHAR_BIT = 8
sizeof (char) = 1
sizeof (int) = 4
sizeof (long) = 8
sizeof (float) = 4
sizeof (double) = 8
sizeof (int *) = 8
sizeof (char *) = 8
sizeof (struct s) = 104
sizeof tab = 20
```

☞ sizeof.c

$$x_{n-1}x_n \dots x_0 = \sum_{i=0}^{n-1} x_i a^i$$

a - baza (podstawa) systemu

Dziesiętny

$46532_{(10)} = 4 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$

Dwójkowy (binarny)

$10011_{(2)} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 19_{(10)}$

Ósemkowy (oktalny)

$351_{(8)} = 3 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 233_{(10)}$

Szesnastkowy (heksadecymalny)

$3\mathsf{FC}_{(16)} = 3 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = 1020_{(10)}$

A=10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15

$$1111110101111110_{(2)} = \mathsf{FD7E}_{(16)} = 176576_{(8)} = 64894_{(10)}$$

Binarny na szesnastkowy

1 cyfrze odpowiadają 4 bity

1111	1101	0111	1110
F	D	7	E

Binarny na ósemkowy

1 cyfrze odpowiadają 3 bity

1	111	110	101	111	110
1	7	6	5	7	6

Liczby ósemkowe i szesnastkowe w C

```c
#include <stdio.h>

int main()
{
    int a = 10;         /* dec */
    int b = 010;        /* oct */
    int c = 0x10;       /* hex */

    printf("dec: %d %d %d\n", a, b, c);
    printf("oct: %o %o %o\n", a, b, c);
    printf("hex: %x %x %x\n", a, b, c);

    return 0;
}
```

☞ dox.c

Przeliczanie na inny system pozycyjny

Problem: wyrazić liczbę $x_{(10)}$ w dowolnym systemie pozycyjnym o podstawie $p \in \{2, \ldots, 10\}$.

139 % 2	1
69 % 2	1
34 % 2	0
17 % 2	1
8 % 2	0
4 % 2	0
2 % 2	0
1 % 2	1

139 % 8	3
17 % 8	1
2 % 8	2

139 % 16	11 B
8 % 16	8

$$139_{(10)} = 10001011_{(2)} = 213_{(8)} = 8\mathrm{B}_{(16)}$$

Algorytm 1 Zapis liczby dziesiętnej w innej podstawie

Dane wejściowe: liczba całkowita przeliczana $x \geqslant 0$ oraz p podstawa docelowego systemu

Wynik: ciąg $\{t_{n-1}, \ldots, t_1, t_0\}$ reprezentujący zapis w nowym systemie

1: $i \leftarrow 0$
2: **dopóki** $x \neq 0$ **wykonuj**
3: $\quad t_i \leftarrow x \bmod p$
4: $\quad x \leftarrow \lfloor \frac{x}{p} \rfloor$
5: $\quad i \leftarrow i + 1$
6: **zwróć** $\{t_{i-1}, \ldots, t_1, t_0\}$ ▷ w odwrotnej kolejności

```c
int zmien_podstawe(int x, int *t, int p)
{
    int i=0;

    while( x != 0 )
    {
        t[i] = x % p;
        x = x / p;
        i = i + 1;
    }
    return i;
}
```

☞ dec2all.c

Operator / dla liczb całkowitych dzieli bez reszty!

Naturalny kod binarny (NKB)

$$b_{n-1} \dots b_1 b_0 = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot 2^i$$

- liczby całkowite bez znaku
- zakres $[0, 2^n - 1]$
- operacje arytmetyczne przeprowadza się podobnie jak w systemie dziesiętnym
- Typy całkowite bez znaku w C:

```
unsigned char
unsigned short          unsigned short int
unsigned int
unsigned long           unsigned long int
unsigned long long      unsigned long long int    /* standard C99 */
```

- John Napier, XVI w.

Typy całkowite bez znaku

typ	rozmiar [B]	zakres
unsigned char	1	$[0, 255]$
unsigned short int	2	$[0, 65535]$
unsigned int	4 (lub 2)	$[0, 4294967295]$
unsigned long int	8 (lub 4)	$[0, 18446744073709551615]$
unsigned long long int	8	$[0, 18446744073709551615]$

- Rozmiary typów zależą od implementacji
- Zakresy typów całkowitych są określone w `limits.h`
  `UINT_MAX`, `ULLONG_MAX`

Typy całkowite bez znaku c.d.

Specyfikator formatu printf/scanf

dec	oct	hex	typ
u	o	x	unsigned int
lu	lo	lx	unsigned long int
llu	llo	llx	unsigned long long int

Przykład

```
unsigned int x = 4294967295;
unsigned long y = 4294967296;
printf("%u\n",  x);
printf("%d\n",  x);
printf("%o\n",  x);
printf("%x\n",  x);
printf("%u\n",  y);
printf("%lu\n", y);
```

```
4294967295
-1
37777777777
ffffffff
0
4294967296
```

☞ uint2.c

```c
#include <stdio.h>
#include <limits.h>

int main()
{
   printf("sizeof\n");
   printf("unsigned char          = %lu\n", sizeof (unsigned char));
   printf("unsigned short         = %lu\n", sizeof (unsigned short));
   printf("unsigned int           = %lu\n", sizeof (unsigned int));
   printf("unsigned long int      = %lu\n", sizeof (unsigned long int));
   printf("unsigned long long int = %lu\n", sizeof (unsigned long long int));
   printf("Zakres:\n");
   printf("UCHAR_MAX              = %hhu\n", UCHAR_MAX);
   printf("USHRT_MAX              = %hu\n" , USHRT_MAX);
   printf("UINT_MAX               = %u\n"  , UINT_MAX);
   printf("ULONG_MAX              = %lu\n" , ULONG_MAX);
   printf("ULLONG_MAX             = %llu\n", ULLONG_MAX);

   return 0;
}
```

☞ uint1.c

```c
#include <stdio.h>
#include <limits.h>

int main()
{
    printf("sizeof\n");
    printf("unsigned char
    printf("unsigned short
    printf("unsigned int
    printf("unsigned long int
    printf("unsigned long long
    printf("Zakres:\n");
    printf("UCHAR_MAX
    printf("USHRT_MAX
    printf("UINT_MAX
    printf("ULONG_MAX
    printf("ULLONG_MAX

    return 0;
}
```

```
                = %hhu\n" , UCHAR_MAX);
                = %hu\n"  , USHRT_MAX);
                = %u\n"   , UINT_MAX);
                = %lu\n"  , ULONG_MAX);
                = %llu\n" , ULLONG_MAX);
```

Wartości mogą się róznić zależnie od implementacji.

```
sizeof
unsigned char = 1
unsigned short = 2
unsigned int = 4
unsigned long int = 8
unsigned long long int = 8
Zakres:
UCHAR_MAX = 255
USHRT_MAX = 65535
UINT_MAX = 4294967295
ULONG_MAX = 18446744073709551615
ULLONG_MAX = 18446744073709551615
```

☞ uint1.c

Liczba całkowita ze znakiem w komputerze

U2, kod uzupełnień do dwóch

$$b_{n-1} \dots b_1 b_0 = -b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i \cdot 2^i$$

- liczby ze znakiem, najstarszy bit b_{n-1} odpowiada za znak
- zakres $\left[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1\right]$
- typy całkowite ze znakiem w C:

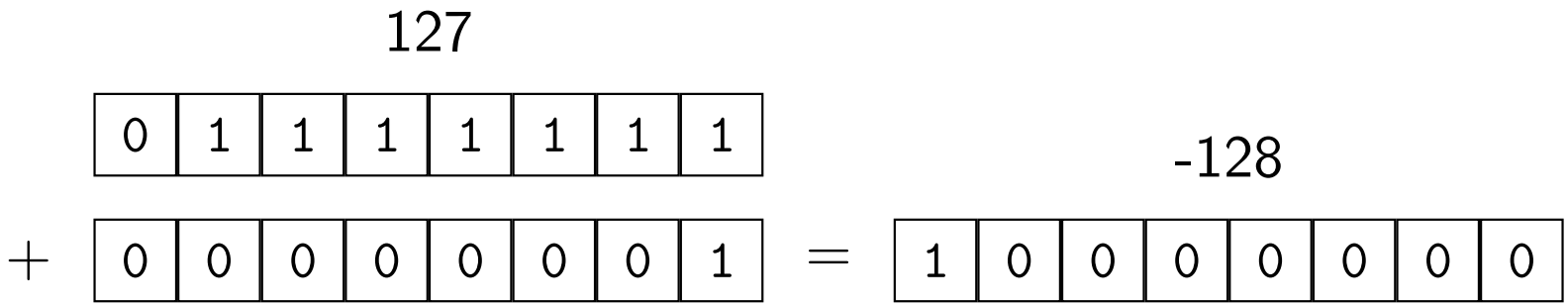
```
char
short               short int
int
long                long int
long long           long long int    /* standard C99 */
```

- można także użyć słowa `signed`, np.: `signed long int`
- operacje arytmetyczne przeprowadza się podobnie jak w NKB
- Pascal, uzupełnienie do 10, XV w.

Liczba całkowita w komputerze

bity	NKB	U2
00000000	0	0
00000001	1	1
⋮		
01111110	126	126
01111111	127	127
10000000	128	-128
10000001	129	-127
⋮		
11111110	254	-2
11111111	255	-1

Nadmiar arytmetyczny



- **Nadmiar** (*overflow*) - przekroczenie zakresu wynikające ze skończonej liczby bitów reprezentujących liczbę
- Zazwyczaj błąd nie jest sygnalizowany.
- Dodawanie dużych liczb dodatnich (lub odejmowanie liczb ujemnych). W U2 widoczna zmiana znaku.
- Próba zapisu liczby typu bardziej pojemnego do typu mniej pojemnego (np. `float` do `char`)
- Dodawanie liczby ujemnej i dodatniej nie powoduje nadmiaru
- 4 czerwiec 1996, pierwszy lot rakiety Ariane 5 zakończony zniszczeniem w skutek nadmiaru, 370 mln $

Typy całkowite ze znakiem

typ	rozmiar [B]	zakres
char	1	$[-128, 127]$
short int	2	$[-32768, 32767]$
int	4 (lub 2)	$[-2147483648, 2147483647]$
long int	8 (lub 4)	$[-9223372036854775808,$
long long int	8	$9223372036854775807]$

- Rozmiary typów zależą od implementacji
- Zakresy typów całkowitych są określone w `limits.h` `INT_MAX`, `INT_MIN`
- Specyfikacja formatu printf: d, ld, lld

```
long int x = 4294967295;
printf("%d\n",  x);        /*  ZLE */
printf("%ld\n", x);        /*  OK  */
```

```c
#include <stdio.h>
#include <limits.h>

int main()
{
    printf("sizeof:\n");
    printf("char           = %lu\n", sizeof (char));
    printf("short          = %lu\n", sizeof (short));
    printf("int            = %lu\n", sizeof (int));
    printf("long int       = %lu\n", sizeof (long int));
    printf("long long int = %lu\n", sizeof (long long int));
    printf("Zakresy:\n");
    printf("CHAR_MIN       = %hhd\n", CHAR_MIN);
    printf("CHAR_MAX       = %hhd\n", CHAR_MAX);
    printf("SHRT_MIN       = %hd\n" , SHRT_MIN);
    printf("SHRT_MAX       = %hd\n" , SHRT_MAX);
    printf("INT_MIN        = %d\n"  , INT_MIN);
    printf("INT_MAX        = %d\n"  , INT_MAX);
    printf("LONG_MIN       = %ld\n" , LONG_MIN);
    printf("LONG_MAX       = %ld\n" , LONG_MAX);
    printf("LLONG_MIN      = %lld\n", LLONG_MIN);
    printf("LLONG_MAX      = %lld\n", LLONG_MAX);

    return 0;
}
```

☞ int1.c

```c
#include <stdio.h>
#include <limits.h>

int main()
{
    printf("sizeof:\n");
    printf("char      = %lu\n", sizeof(char));
    printf("short     = %lu\n", sizeof(short));
    printf("int       = %lu\n", sizeof(int));
    printf("long int  = %lu\n", sizeof(long int));
    printf("long long int = %lu\n", sizeof(long long int));
    printf("Zakresy:\n");
    printf("CHAR_MIN  = %d\n", CHAR_MIN);
    printf("CHAR_MAX  = %d\n", CHAR_MAX);
    printf("SHRT_MIN  = %d\n", SHRT_MIN);
    printf("SHRT_MAX  = %d\n", SHRT_MAX);
    printf("INT_MIN   = %d\n", INT_MIN);
    printf("INT_MAX   = %d\n", INT_MAX);
    printf("LONG_MIN  = %ld\n", LONG_MIN);
    printf("LONG_MAX  = %ld\n", LONG_MAX);
    printf("LLONG_MIN = %lld\n", LLONG_MIN);
    printf("LLONG_MAX = %lld\n", LLONG_MAX);

    return 0;
}
```

Wartości mogą się róznić zależnie od implementacji.

```
sizeof:
char = 1
short = 2
int = 4
long int = 8
long long int = 8
Zakresy:
CHAR_MIN = -128
CHAR_MAX = 127
SHRT_MIN = -32768
SHRT_MAX = 32767
INT_MIN = -2147483648
INT_MAX = 2147483647
LONG_MIN = -9223372036854775808
LONG_MAX = 9223372036854775807
LLONG_MIN = -9223372036854775808
LLONG_MAX = 9223372036854775807
```

☞ int1.c

Kod stałoprzecinkowy

$3,14_{(10)} = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$
$11,001_{(2)} = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 3,125_{(10)}$

Zapis zmiennoprzecinkowy

$$L = m \cdot p^c$$

c - cecha
p - podstawa (baza)
m - mantysa

$3,14 \cdot 10^0 = 0,0314 \cdot 10^2 = 314 \cdot 10^{-2}$

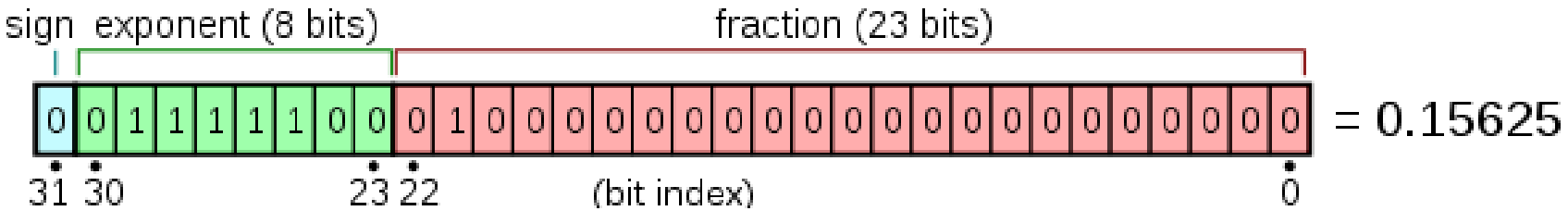
Normalizacja

$$1 \leqslant |m| < p$$

Liczby zmiennopozycyjne IEEE-754

pojedyncza precyzja (*single precision*), `float`

$$x = (-1)^s \cdot 1.m \cdot 2^{(c-127)}$$



$s = 0$

$1.m = \left(1 + \sum_{i=1}^{23} b_{23-i} \cdot 2^{-i}\right) = 1 + 2^{-2} = 1.25$

$2^{(c-127)} = 2^{(124-127)} = 2^{-3} = 0.125$

Podobne rozwiązanie stosował Konrad Zuse, 1936 r.

http://en.wikipedia.org/wiki/Single-precision_floating-point_format

Typy zmiennopozycyjne w C

typ	rozmiar	zakres	cyfry znaczące
`float`	32 b	$\pm 3.4 \cdot 10^{38}$	6
`double`	64 b	$\pm 1.8 \cdot 10^{308}$	15
`long double`	80 b	$\pm 1.2 \cdot 10^{4932}$	18

- Zakresy typów zmiennopozycyjnych są zdefiniowane w pliku nagłówkowym `float.h`
  np.: `FLT_MAX`, `DBL_MAX`
- Wartości `long double` zależą od implementacji (w MS VC++ tożsame z `double`)

Formatowenie liczb zmiennopozycyjnych

Formatowanie liczb zmiennopozycyjnych za pomocą `printf`

specyfikator	znaczenie	przykład
`f`	dziesiętnie	`123.45678`
`e, E`	notacja naukowa	`1.2345678e+2`
`g`	krótszy zapis %f lub %e	`123.4657`
`Lf, Le, Lg`	dla typu `long double`	1.2345e+400
`.2f`	dokładność 2 miejsc po przecinku	`123.46`

Przykład

```
float  x = 10.14;
double y = 5e-3;

printf("%f  %e  %g\n", x, x, x);
printf("%f  %e  %g\n", y, y, y);
```

```
10.140000  1.014000e+01  10.14
0.005000  5.000000e-03  0.005
```

Znaczenie specjalne bitów IEEE-754

cecha	mantysa	znaczenie
$1\ldots1$	$\neq 1\ldots1$	nieliczby `NaN`
$1\ldots1$	$0\ldots0$	nieskończoność `Inf`, `-Inf`

- `NaN`, wartość nieokreślona, np.: $\frac{0}{0}$, $\sqrt{-1}$, $\ln -1$
- Nieskończoność, wynik dzielenia przez 0

Wyniki operacji z wartościami specjalnymi

Wartości `NaN` i `Inf` są propagowane w dalszych obliczeniach.

Operacja	Wynik
$\pm x / \pm\infty$	0
$\pm\infty \cdot \pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm x / 0$	$\pm\infty$
$\infty + \infty$	∞
$\pm 0 / \pm 0$	`NaN`
$\infty - \infty$	`NaN`
$\pm\infty / \pm\infty$	`NaN`
$\pm\infty \cdot 0$	`NaN`

Niedokładność reprezentacji

```c
#include <stdio.h>

int main()
{
    float x = 0.1;

    if(x  == 0.1 ) printf ("OK, %f jest rowne 0.1\n", x);
    else printf("Nie OK, %f nie jest rowne 0.1\n", x);

    return 0;
}
```

☞ prec.c

Niedokładność reprezentacji

```c
#include <stdio.h>

int main()
{
    float x = 0.1;

    if(x == 0.1 ) printf ("OK, %f jest rowne 0.1\n", x);
    else printf("Nie OK, %f nie jest rowne 0.1\n", x);

    return 0;
}
```

☞ prec.c

- Niektóre liczby nie będą dokładnie reprezentowane
- Liczb zmiennoprzecinkowych nie należy przyrównywać do dokładnych wartości. Lepiej $|a - b| < \epsilon$

Niedokładność reprezentacji

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define EPS 0.000001

int main()
{
    float x = 0.1;

    if( fabs(x-0.1) < EPS )
        printf ("OK, %f jest rowne 0.1\n", x);
    else
        printf("Nie OK, %f nie jest rowne 0.1\n", x);

    return 0;
}
```

☞ prec2.c

Epsilon maszynowy

- **Epsilon maszynowy** określa precyzję obliczeń numerycznych na liczbach zmiennopozycyjnych
- Najmniejsza liczba nieujemna, której dodanie do jedności daje wynik nierówny 1.
  Najmniejsze $\epsilon > 0$ takie, że $1 + \epsilon \neq 1$
- Im mniejsza wartość epsilona maszynowego, tym większa jest względna precyzja obliczeń.
- Nie mylić z najmniejszą liczbą większą od zera

Epsilon maszynowy

```c
#include <stdio.h>
#include <float.h>

int main()
{
    float epsilon = 1.0;
    float p_epsilon = 1.0;
    float x = 1.0;

    printf( "epsilon          1.0 + epsilon\n" );

    while (x + epsilon != 1.0)
    {
        printf( "%e\t%.20f\n", epsilon, (x + epsilon) );
        p_epsilon = epsilon;
        epsilon = epsilon / 2;
    }
    printf( "\nObliczony epsilon: %e\n", p_epsilon );
    printf( "FLT_EPSILON      : %e\n", FLT_EPSILON );
    return 0;
}
```

☞ epsilon.c

```c
#include <stdio.h>
#include <float.h>

int main()
{
   printf("Limity typu float:\n");
   printf("sizeof(float)        : %ld\n", sizeof(float));
   printf("Najwieksza wartosc   : %e\n", FLT_MAX );
   printf("Najmniejsza dodatnia : %e\n", FLT_MIN );
   printf("Epsilon maszynowy    : %e\n", FLT_EPSILON );
   printf("Cyfry znaczace       : %d\n", FLT_DIG );

   printf("\nLimity typu double:\n");
   printf("sizeof(double)       : %ld\n", sizeof(double));
   printf("Najwieksza wartosc   : %e\n", DBL_MAX );
   printf("Najmniejsza dodatnia : %e\n", DBL_MIN );
   printf("Epsilon maszynowy    : %e\n", DBL_EPSILON );
   printf("Cyfry znaczace       : %d\n", DBL_DIG );

   printf("\nLimity typu long double:\n");
   printf("sizeof(long double)  : %ld\n", sizeof(long double));
   printf("Najwieksza wartosc   : %Le\n", LDBL_MAX );
   printf("Najmniejsza dodatnia : %Le\n", LDBL_MIN );
   printf("Epsilon maszynowy    : %Le\n", LDBL_EPSILON );
   printf("Cyfry znaczace       : %d \n", LDBL_DIG );

   return 0;
}
```

☞ float.c

```c
#include <stdio.h>
#include <float.h>

int main()
{
   printf("Limity typu float:\n");
   printf("sizeof(float)        : %ld\n", sizeo
   printf("Najwieksza wartosc   : %e\n", FLT_MA
   printf("Najmniejsza dodatnia : %e\n", FLT_MI
   printf("Epsilon maszynowy    : %e\n", FLT_EP
   printf("Cyfry znaczace       : %d\n", FLT_DI

   printf("\nLimity typu double:\n");
   printf("sizeof(double)       : %ld\n", sizeo
   printf("Najwieksza wartosc   : %e\n", DBL_MA
   printf("Najmniejsza dodatnia : %e\n", DBL_MI
   printf("Epsilon maszynowy    : %e\n", DBL_EP
   printf("Cyfry znaczace       : %d\n", DBL_DI

   printf("\nLimity typu long double:\n");
   printf("sizeof(long double)  : %ld\n", sizeo
   printf("Najwieksza wartosc   : %Le\n", LDBL_
   printf("Najmniejsza dodatnia : %Le\n", LDBL_
   printf("Epsilon maszynowy    : %Le\n", LDBL_
   printf("Cyfry znaczace       : %d \n", LDBL_

   return 0;
}
```

Wartości mogą się róznić zależnie od implementacji.

```
Limity typu float:
sizeof(float) : 4
Najwieksza wartosc : 3.402823e+38
Najmniejsza dodatnia : 1.175494e-38
Epsilon maszynowy : 1.192093e-07
Cyfry znaczace : 6

Limity typu double:
sizeof(double) : 8
Najwieksza wartosc : 1.797693e+308
Najmniejsza dodatnia : 2.225074e-308
Epsilon maszynowy : 2.220446e-16
Cyfry znaczace : 15

Limity typu long double:
sizeof(long double) : 16
Najwieksza wartosc : 1.189731e+4932
Najmniejsza dodatnia : 3.362103e-4932
Epsilon maszynowy : 1.084202e-19
Cyfry znaczace : 18
```

☞ float.c

Inne możliwe problemy

- **nadmiar** (*overflow*) - przekroczenie zakresu (`+Inf`, `-Inf`)
- **niedomiar** (*underflow*) - zaokrąglenie bardzo małej liczby do 0
- redukcja cyfr przy odejmowaniu bardzo bliskich sobie liczb
- dodawanie (lub odejmowanie) dużej i małej liczby
- kolejność operacji może mieć wpływ na wynik
  $(a + b) + c \neq a + (b + c)$
- zaokrąglenia, np. liczby 0.1 nie można dokładnie reprezentować w systemie binarnym
- 25 luty 1991 r., wojna w zatoce perskiej, awaria systemu antyrakietowego Patriot (zegar rakiety tykał co 0.1 s.), zginęło 28 amerykańskich żołnierzy a 100 zostało rannych.

Przykład: szereg harmoniczny

Problem: wyznaczyć sumę pierwszych n elementów szeregu harmonicznego

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

```c
#include <stdio.h>

int main()
{
    float x=0.0, y=0.0;
    int i=1, n;

    printf("n="); scanf("%d", &n);

    while(i <= n)
    {
        x = x + 1.0/i;
        y = y + 1.0/(n-i+1);
        i = i + 1;
    }

    printf("x=%f\ny=%f\n",x,y);
    return 0;
}
```

```
n=150
x=5.591181
y=5.591181

n=600
x=6.974980
y=6.974978

n=2000
x=8.178369
y=8.178370

n=500000
x=13.690692
y=13.699607
```

☞ szereg.c

Przykład: miejsca zerowe paraboli

Problem: wyznacz miejsca zerowe wielomianu stopnia 2

$$y(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Dla $\Delta > 0$ istnieją 2 miejsca zerowe

$$x_1 = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Dla $\Delta = 0$ istnieje 1 miejsca zerowe

$$x_1 = -\frac{b}{2a}$$

Dla $\Delta < 0$ brak rzeczywistych miejsc zerowych

```c
int miejsca_zerowe(float a, float b, float c, float *x1, float *x2)
{
    float delta;

    delta = b*b - 4*a*c;

    if( fabs(delta) < EPS )
    {
        *x1=-b/a/2;
        *x2=*x1;
        return 1;
    }

    if(delta >= EPS)
    {
        delta=sqrt(delta);
        *x1 = -(b-delta)/(2*a);
        *x2 = -(b+delta)/(2*a);
        return 2;
    }
    return 0;
}
```

☞ miejscazerowe.c

Problemy z odejmowaniem

- możliwe błędy, gdy jeden z pierwiastków bliski 0, tzn $b \approx \sqrt{\Delta}$

$$x_1 = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- np.: $a = 1, b = -100, c = 1 \implies \sqrt{\Delta} \approx 99.979997999$
- `x1=99.99000e+01, x2=1.000214e-02`
- `w(x1)=0.000000e+00, w(x2)=-1.136065e-04`

Problemy z odejmowaniem

- możliwe błędy, gdy jeden z pierwiastków bliski 0, tzn $b \approx \sqrt{\Delta}$

$$x_1 = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Jeśli problem jest trudny - najlepiej zmienić problem
- wzory Viete'a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

- `x1=9.999000e+01, x2=1.000100e-02`
- `w(x1)=0.000000e+00, w(x2)=0.000000e+00`

```c
int miejsca_zerowe2(float a, float b, float c, float *x1, float *x2)
{
    float delta;

    delta = b*b - 4*a*c;

    if( fabs(delta) < EPS )
    {
        *x1=-b/a/2;
        *x2=*x1;
        return 1;
    }

    if( delta >= EPS )
    {
        delta=sqrt(delta);
        if(b < 0) *x1 =  (delta-b)/(2*a);
        else      *x1 = -(b+delta)/(2*a);
        *x2 = (c/a)/ *x1;
        return 2;
    }
    return 0;
}
```

☞ miejscazerowe.c

Podsumowanie

- Typy całkowite: `char`, `short`, `int`, `long`
- Typy całkowite bez znaku: `unsigned`
- Typy zmiennopozycyjne: `float`, `double`
- Nadmiar, niedomiar i inne efekty wynikające z bitowej reprezentacji liczb
- `3/2` wynosi `1`, zaś `3/2.0` wynosi `1.5`
- Porównywanie wartości zmiennopozycyjnych `fabs(a-b)<EPS`

Literatura dodatkowa

- Jerzy Wałaszek, *„Binarne kodowanie liczb”*, http://edu.i-lo.tarnow.pl/inf/alg/006_bin/index.php
- Thomas Huckle, *„Collection of Software Bugs”*, http://www5.in.tum.de/~huckle/bugse.html
- Piotr Krzyżanowski, Leszek Plaskota, Materiały do wykładu *„Metody numeryczne”*, Uniwersytet Warszawski, WMIiM, http://wazniak.mimuw.edu.pl/
- WikiBooks, *„Kursie programowania w języku C”*, Zaawansowane operacje matematyczne, http://pl.wikibooks.org/wiki/C/Zaawansowane_operacje_matematyczne/