

Algorytmy

Ostatnia aktualizacja: 3 listopada 2025

DOKŁADNA NAUKA
WARZENIA PIWA.

WEDŁUG METODY ŁATWEJ, STWIERDZONEJ
OSMIOLETNIM DOŚWIADCZENIEM.

DO WYNAŁAZKÓW NAYNOWSZYCH
ZASTOSOWANA,

Z PRZYDANEM OPISANIEM APPARATU DO STUDZENIA, ZASTY-
PIĄCEGO ZWYKŁĄ KILKATOKI, ZA POMOCĄ KTÓREGO PI-
WO WRAŻE, W PRZECIĄGU IEDNEJ MINUTY DO TEMPERATURY
WODY STUDZENNEJ OCHŁODZONE BYDŹ MOŻE;

PRZEDSTAWIONA W SPOSÓBIE PRAKTYCZNYM,

PRZEZ KAROLA WILHELMA SCHMIDT,
AUTORA ROZMAITYCH DZIEŁ TECHNOLOGICZNYCH.

PRZEŁOŻONA Z JĘZYKA NIEMIECKIEGO,
DLA UŻYTKU ZIEMIANY POLSKICH.



WARSZAWA.

NAKLAD I Druk N. GLÜCKSBERGA,
KSIĘGARNIA I TYPOGRAFIA KRÓL: WARSZAW: UNIWERSYT.

1830.

Chambers udziela w swych pismach odmienny spo-
sób robienia Piwa Brunświckiego, odpisany iak twier-
dzi, z pierwotnéj Recepty, zachowywauéj na Ratuszu
miejskim w Brunświku.

Według Recepty téj wziąć należy 200 miarek
zwanych *Kanne* wody, i te tak długo gotować, po-
kąd 1/3 części iéy nie ubędzie. Sypie się potem do
téj wody siedm Szeflów siodu Pszennego i jeden Sze-
fel drobnéj Fasoli; gdy odleie się do beczki dla wy-
robienia, nie należy zapelniać iéy całkowicie, bo sko-
ro fermentacya nastąpi, kładzie się do beczki we-
wnętrznej kory z Sosnińy funtów trzy, pączków Brzo-
zowych i kotków (pączków) Sosnowych po funcie
jednym, trzy garści ziela *Cārdi-Benedicti*, garść je-
dną lub dwie kwiatu zwanego *Sonnenthaublütthe*, *Pim-
pinelli*, *Betoniki*, *Majeranu*, ziela zwanego *Poley* i dzi-
kiego *Tymianku*, każdego pół garści, albo garść ca-
łą, kwiatu *Bzowego* garści dwie, owocu róży polnéj
uncyi 30, utłuczonych.— Po nakładzeniu tych zapraw
do beczki, dolewa się ta do pełności, zaczęm skutkiem
fermentacyi Piwo naciągnie nieco zapachu i smaku,
z zapraw przydanych.— Przy ukończeniu fermentacyi
wybiją się do beczki i0 jay świeżo zniesionych i ta
szpuntują się. Wę dwa roky dopiero po zaszpuntuwa-
niu ściąga się Piwo do picia.

- składniki (dane wejściowe):
woda, sól, itd.
- wynik:
beczka piwa
- sprzęt:
beczka, piwowar (mielcarz)
- przepis:
oprogramowanie, algorytm
- instrukcje:
*dodawanie składników,
gotowanie, odlewanie,
dolewanie, fermentacja,
szpuntowanie, ...*

Chambers udziela w swych pismach odmienny sposób robienia Piwa Brunświckiego, odpisany iak twierdzi, z pierwotney Recepty, zachowywauący na Ratuszu mieyskim w Brunświku.

Według Recepty téy wziąć należy 200 miarek zwanych *Kanne* wody, i te tak długo gotować, pokąd 1/3 części iéy nie ubędzie. Sypie się potem do téy wody siedm Sześliów siodu Pszennego i jeden Szeffel drobnéy Fasoli; gdy odleie się do beczki dla wyrobienia, nie należy zapełniać iéy całkowicie, bo skoro fermentacyia nastąpi, kładzie się do beczki wewnętrzney kory z Sośninny funtów trzy, pączków Brzozowych i kotków (pączków) Sosnowych po funcie jednym, trzy garści ziela *Cārdi-Benedicti*, garść jedną lub dwie kwiatu zwanego *Sonnthaublütthe*, *Pimpinelli*, *Betoniki*, *Majeranu*, ziela zwanego *Poley* i dzikiego *Tymianku*, każdego pół garści, albo garść całą, kwiatu *Bzowego* garści dwie, owocu róży polnéy uncyi 30, utłuczonych. — Po nakładzeniu tych zapraw do beczki, dolewa się ta do pełności, zaczęm skutkiem fermentacyi Piwo naciągnie nieco zapachu i smaku, z zapraw przydanych. — Przy ukończeniu fermentacyi wybiją się do beczki io jay świeżo zniesionych i ta szpuntuie się. We dwa roky dopiero po zaszpuntowaniu ściaga się Piwo do picia.

ALGORYTM

jednoznacznie zdefiniowany ciąg operacji prowadzący w skończonej liczbie kroków do rozwiązania zadania.

ALGORYTM EUKLIDESA, OK. 300 P.N.E.

algorytm znajdowania największego wspólnego dzielnika (NWD) dwóch liczb całkowitych dodatnich. Uznawany za pierwszy kiedykolwiek wymyślony niebanalny algorytm.

Algorytmy to rozwiązania pewnych zadań - **zadań algorytmicznych**.

SPECYFIKACJA ZADANIA ALGORYTMICZNEGO

- warunki jakie muszą spełniać dane wejściowe
- określenie oczekiwanych wyników jako funkcji danych wejściowych

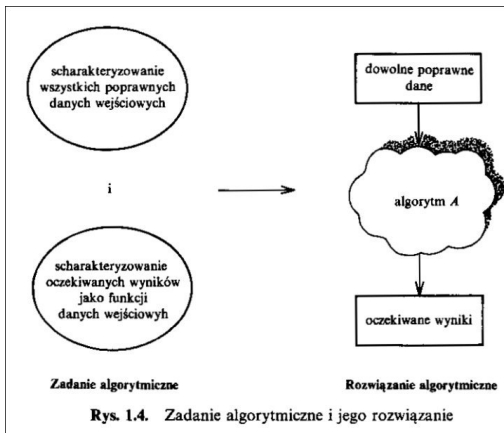
Specyfikacja może też definiować ograniczenia algorytmu, np. dotyczące liczby operacji.

PRZYKŁAD SPECYFIKACJI: ALGORYTM EUKLIDESA

Dane wejściowe: dwie liczby naturalne a i b

Wynik: liczba naturalna $NWD(a, b)$

Rozwiązanie zadania algorytmicznego to skonstruowanie algorytmu, który dla każdego dopuszczalnych danych wejściowych wyznaczy wynik zgodny ze specyfikacją.



CECHY ALGORYTMU

- **skończoność** - algorytm musi zakończyć działanie po skończonej liczbie kroków
- **poprawność** - algorytm powinien dawać prawidłowy wynik dla wszystkich dopuszczalnych danych wejściowych
- **uniwersalność** - algorytm powinien działać dla wszystkich przypadków spełniających warunki zadania, a nie tylko dla konkretnego przykładu
- **efektywność** - rozwiązanie powinno być możliwe do zrealizowania w rozsądnym czasie i z dostępnymi zasobami
- **określoność** - każdy krok musi być precyzyjnie opisany, bez możliwości różnej interpretacji.

Ciąg **struktur sterujących** definiuje kolejność wykonywanych operacji.

- bezpośrednie następstwo: *wykonaj A, potem B*
- wybór warunkowy (rozgałęzienie): *jeśli Q to wykonaj A, w przeciwnym razie wykonaj B*
- iteracja ograniczona: *wykonaj A dokładnie N razy*
- iteracja warunkowa: *dopóki Q, wykonuj A*
- instrukcja skoku: *skocz do G*
- podprogram - wyodrębniony fragment programu, funkcja

Struktury sterujące można dowolnie składać: np. pętle zagnieżdżone. „Nie ma granic złożoności algorytmów”.

- Opis językiem naturalnym
- Lista kroków
- Schematy blokowe
- Pseudo-języki
- Języki wysokiego poziomu

PROBLEM:

znalezienie największej liczby naturalnej, która dzieli liczby naturalne a i b bez reszty

POMYSŁ:

Zauważmy, że

$$NWD(a, b) = k \implies a = nk, b = mk \implies a - b = (m - n)k$$

Stąd dla $a > b$ zachodzi

$$NWD(a, b) = NWD(a - b, b) = NWD(a - b, a)$$

.

ALGORYTM EUKLIDESA

Dane są dwie liczby naturalne. Odejmij od większej liczby mniejszą liczbę a większą liczbę zastąp uzyskaną różnicą. Powtarzaj tę czynność tak długo aż obie liczby będą równe. Otrzymana liczba jest największym wspólnym dzielnikiem liczb wejściowych.

SPECYFIKACJA

Dane wejściowe: liczby naturalne a i b

Wynik: liczba naturalne a stanowiąca największy wspólny dzielnik

LISTA KROKÓW

- 1 jeśli a jest równe b to jest to największy dzielnik
- 2 jeśli $a > b$ to zastąp a wartością $a - b$ i wróć do punktu 1
- 3 jeśli $a < b$ to zastąp b wartością $b - a$ i wróć do punktu 1

Algorytm zakłada istnienie operacji $-$, $=$ (równość) oraz $>$.

Stan

Blok graniczny: start, stop, przerwanie, opóźnienie.

Instrukcje

Blok operacyjny: zmiana wartości, postaci lub miejsca zapisu danych.

Decyzja

Blok decyzyjny, rozgałęzienie.

Wejście/
wyjście

Wprowadzanie danych i wyprowadzenia wyników.

Łącznik

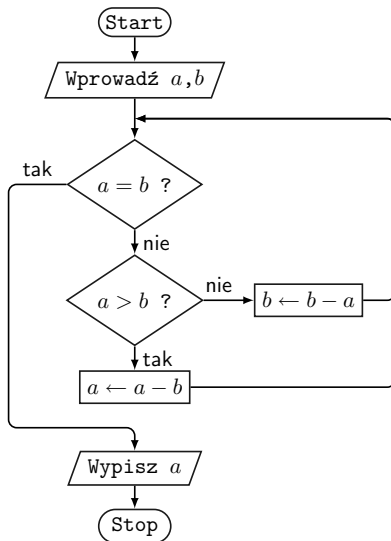
Połączenie z innym fragmentem diagramu.

Podprogram

Wywołanie podprogramu.

PRZYKŁAD: SCHEMAT BLOKOWY

ALGORYTM EUKLIDESA Z ODEJMOWANIEM



Algorithm Algorytm Euklidesa

dopóki $a \neq b$ **wykonuj**
 jeżeli $a > b$ **wykonaj**
 $a \leftarrow a - b$
 w przeciwnym wypadku
 $b \leftarrow b - a$

- struktura kodu języka wysokiego poziomu
- uproszczona składnia na rzecz prostoty i czytelności
- formuły matematyczne, język naturalny, podprogramy
- nie zawiera szczegółów implementacji
 „Dla ludzi, nie dla maszyn”.

```
1  /*  Algorytm Euklidesa.  */  
2  
3  #include <stdio.h>  
4  
5  int main()  
6  {  
7      int a, b;  
8  
9      printf("Podaj dwie liczby calkowite: ");  
10     scanf("%d %d", &a, &b);  
11  
12     while (a != b)  
13         if (a > b) a = a - b;  
14         else     b = b - a;  
15  
16     printf("NWD = %d\n", a);  
17  
18     return 0;  
19 }
```

```
1  program NWD(input,output);
2  { Algorytm Euklidesa. }
3  var
4      A, B : Integer;
5  begin
6      Writeln('Podaj dwie liczby calkowite: ');
7      Readln(a,b);
8
9      while a <> b do
10     begin
11         if a > b then a := a - b
12         else b := b - a;
13     end;
14     Writeln('NWD = ', a);
15 end.
```

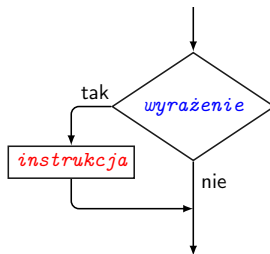
PROGRAM W JĘZYKU FORTRAN 77

```
1      PROGRAM EUCLID1
2  c    Algorytm Euklidesa w jezyku Fortran 77
3
4      WRITE (*,*) 'Podaj dwie liczby calkowite: '
5      READ (*,*) N, M
6
7      DO WHILE ( N .NE. M )
8          IF ( N .GT. M ) THEN
9              N = N - M
10         ELSE
11             M = M - N
12         ENDIF
13     ENDDO
14     WRITE (*,*) 'NWD= ', N
15     END
```

 euclid1.f

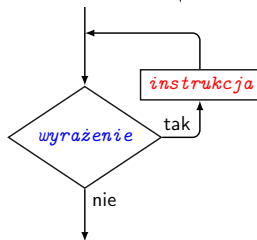
WARUNEK IF (JEŻELI)

```
if ( wyrażenie )  
    instrukcja
```



PĘTLA WHILE (DOPÓKI)

```
while ( wyrażenie )  
    instrukcja
```



- Czy algorytm jest poprawny? Dla jakich danych?
- Problem stopu. Czy algorytm posiada skończoną ilość kroków?
- Efektywność algorytmu. Ile iteracji należy się spodziewać dla różnych danych?

Algorithm Algorytm Euklidesa

```
1: dopóki  $b \neq 0$  wykonuj  
2:    $c \leftarrow a \bmod b$   
3:    $a \leftarrow b$   
4:    $b \leftarrow c$ 
```

- wymaga operacji dzielenie modulo oraz $\neq$
- złożoność: dla $a > b \geq 0$ co najwyżej $2 \log_2(a + b)$ iteracji

```
1  #include <stdio.h>
2
3  int main()
4  {
5      int a, b, c;
6
7      printf("Podaj dwie liczby calkowite: ");
8      scanf("%d %d", &a, &b);
9      printf("NWD(%d,%d) = ", a, b);
10
11     while (b != 0)
12     {
13         c = a % b;
14         a = b;
15         b = c;
16     }
17     printf("%d\n", a);
18
19     return 0;
20 }
```

Podprogram - funkcja lub procedura, wydzielona część programu

- **wielokrotne użycie** - mogą być wywołane w różnych miejscach programu
- **ekonomiczność** - ujednolica powtarzające się bloki programu, mniej kodowania,
- **czytelność** - nawet przy złożonych i obszernych algorytmach
- **modularny kod** - podział kodu na mniejsze fragmenty, ułatwia jego rozwój i utrzymanie
- podprogram staje się nową instrukcją elementarną
w języku C brak wbudowanych funkcji oprócz `main()`
- uproszczenie problemu poprzez rozbiecie na mniejsze pod-problemy
 - programowanie zstępujące (*top-down*)
 - programowanie wstępujące (*bottom-up*)
- podprogram może uruchamiać sam siebie - **rekurencja**

```
1  int nwd(int a, int b)
2  {
3      int c;
4      while (b != 0)
5      {
6          c = a % b;
7          a = b;
8          b = c;
9      }
10     return a;
11 }
```

 euclid3.c

```
1  int nwd(int a, int b)
2  {
3      if (b == 0) return a;
4      return nwd(b, a % b);
5  }
```

 euclid3rekurencja.c

Algorithm Sortowanie przez wybieranie (selection sort)

Dane wejściowe: ciąg n liczb $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Wynik: uporządkowany ciąg $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$

1: $i \leftarrow 1$

2: **dopóki** $i < n$ **wykonuj**

3: $k \leftarrow \text{minind}(\{a_i, a_{i+1}, \dots, a_n\})$

▷ Podprogram

4: $a_i \longleftrightarrow a_k$

5: $i \leftarrow i + 1$

Procedura minind wyszukuje położenie najmniejszego elementu

Specyfikacja minind

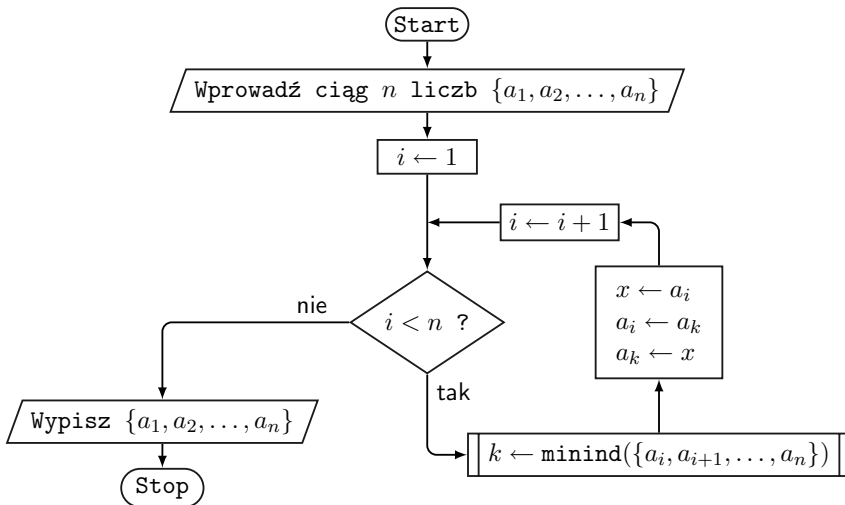
Dane wejściowe: ciąg m liczb $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$

Wynik: indeks najmniejszej liczby w ciągu

Wizualizacja algorytmów sortowania:  AlgoRythmics

PRZYKŁAD: SCHEMAT BLOKOWY

SORTOWANIE PRZECZ WYBIERANIE



ZŁOŻONOŚĆ OBLICZENIOWA

liczba operacji wykonywanych przez algorytm. Zazwyczaj wyznaczana względem ilości danych lub ich rozmiaru.

Ile operacji wymaga ...

- porównanie dwóch liczb całkowitych?
- obliczenie $NWD(a, b)$?
- znalezienie pewnego elementu wśród N elementów?
- posortowanie zbioru N elementów?
- problem komiwojażera: znalezienie najkrótszej drogi łączącej miasta?

PROBLEM KOMIWOJAŻERA (TSP)

TRAVELLING SALESMAN PROBLEM



Tabela 1.1. Czasy znalezienia przez komputer, wykonujący 100 miliardów operacji na sekundę, najkrótszej trasy podróży premiera (zob. ćwiczenie 1.3)

Liczba województw	Czas znajdowania najkrótszej trasy
17	3.5 minuty
25	$2 \cdot 10^5$ lat
49	$4 \cdot 10^{42}$ lat

Rysunek 1.1. Najkrótsza trasa premiera przebiegająca przez wszystkie miasta wojewódzkie w podziale administracyjnym z 1975 roku (A. Adrabiński)

[1] M.M. Sysło, „Algorytmy”

PROBLEMY O „ROZSĄDNYCH” ROZWIĄZANIACH

PROBLEMY P I NP

$\begin{matrix} N \\ \text{Funkcja} \end{matrix}$	10	50	100	300	1000
$5N$	50	250	500	1500	5000
$N \times \log_2 N$	33	282	665	2469	9966
N^2	100	2500	10 000	90 000	1 milion (7 cyfr)
N^3	1000	125 000	1 milion (7 cyfr)	27 milionów (8 cyfr)	1 miliard (10 cyfr)
2^N	1024	liczba 16-cyfrowa	liczba 31-cyfrowa	liczba 91-cyfrowa	liczba 302-cyfrowa
$N!$	3,6 miliona (7 cyfr)	liczba 65-cyfrowa	liczba 161-cyfrowa	liczba 623-cyfrowa	niewyobrażal- nie duża
N^N	10 miliardów (11 cyfr)	liczba 85-cyfrowa	liczba 201-cyfrowa	liczba 744-cyfrowa	niewyobrażal- nie duża

Dla porównania: liczba protonów w znanym wszechświecie ma 126 cyfr,
liczba mikrosekund od „wielkiego wybuchu” ma 24 cyfry.

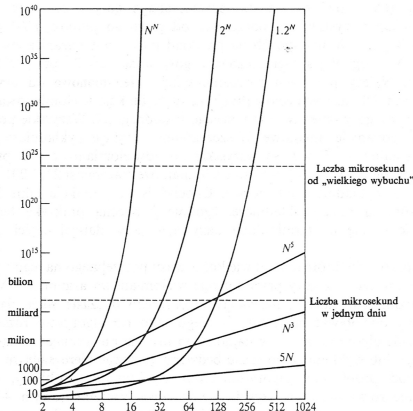
Rys. 7.3. Niektóre wartości pewnych funkcji

[2] D. Harel, *Rzecz o istocie informatyki. Algorytmika.*

PROBLEMY O „ROZSĄDNYCH” ROZWIĄZANIACH

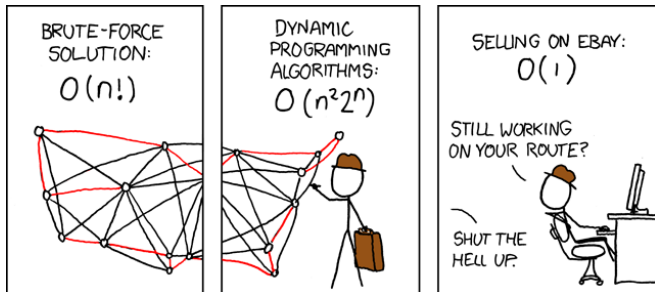
PROBLEMY P I NP

- Rozsądne rozwiązania, wykonywalne w czasie wielomianowym
 $\log N$, N , $N \log N$, $N^7 + N^3 + 2$
- Nerozsądne, niepraktyczne, czas ponad-wielomianowy
 2^N , $1.001^N + N^7$, N^N , $N!$

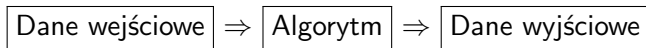


Rys. 7.4. Tempo wzrostu pewnych funkcji

[2] D. Harel, *Rzecz o istocie informatyki. Algorytmika.*



Reprezentacja danych kształtuje algorytm!



- zmienne: liczby, znaki, adresy $a = 3$
- tablice, wektory, listy, $a[3]=3$
- macierze, tablice tablic, $a[3,3]=3$ $a[3][3]=3$
- rekordy, struktury, $a.b=3$ $a.c='a'$
- kolejki, stosy, drzewa
- pliki, bazy danych

Złożoność pamięciowa: miara ilości pamięci potrzebnej do wykonania algorytmu

Trade-off: kompromis między złożonością obliczeniową a pamięciową. Często algorytmy pamięciożerne, mogą być szybsze, gdy algorytmy oszczędzające pamięć mogą wymagać więcej obliczeń.

OD PROBLEMU DO ROZWIĄZANIA

- analiza problemu
- specyfikacja zadania:
 - dopuszczalny zestaw danych wejściowych
 - pożądane wyniki jako funkcja danych wejściowych
- algorytm - rozwiązanie zadania
- poprawność algorytmu:
 - względem specyfikacji
 - problem stopu
 - efektywność (złożoność): „*Każda akcja zajmuje czas!*”
- implementacja algorytmu $\Rightarrow$ program

-  Maciej M. Sysło, „*Algorytmy*”, WSiP, Warszawa, 2002.
-  D. Harel, *Rzecz o istocie informatyki. Algorytmika.*, WNT, Warszawa, 1992.
-  Fulmański Piotr, Sobieski Ścibór, „*Wstęp do informatyki*”, Uniwersytet Łódzki, 2004